JONATHAN MULLER

# Le paradoxe de Banach-Tarski

Mémoire présenté pour l'obtention de la
première année de magistère de mathématiques.

**Sous la direction de Michel Emery**

Soutenu le 19 Septembre 2007

# Avant-propos

Il n'est pas rare que les mathématiques soient à l'origine de résultats troublants, voire gênants pour le bon sens commun. Dès l'antiquité, de tels résultats ont été découverts puis étudiés et discutés par les philosophes grecs. C'est sans doute le plus étrange des résultats mathématiques de ces dernières décennies que nous allons étudier dans ce mémoire : étant donné deux ensembles bornés $A$ et $B$ de $\mathbb{R}^3$, d'intérieurs non vides, on peut en théorie découper l'un de ces ensembles en un nombre fini de morceaux et les réassembler afin de former l'autre ensemble, à l'aide d'isométries et sans apport de matière. En quelque sorte, si les choses étaient aussi bien faites que dans nos chers espaces euclidiens, on pourrait, armé d'un simple ciseau, découper un petit pois et réassembler les morceaux pour fabriquer autant de petits pois de la même taille qu'on le souhaite. De là à résoudre le problème de la faim dans le monde, il n'y a qu'un pas... malheureusement infranchissable.

Ce résultat est connu sous le nom de paradoxe de Banach-Tarski, ou théorème de Hausdorff-Banach-Tarski [1], c'est selon. Sa démonstration n'exige que des outils de base, normalement connus de tout étudiant de fin de licence : algèbre linéaire, géométrie, théorie des groupes et théorie des ensembles (dénombrables). Les conséquences que nous étudierons, et les compléments que nous feront, utilisent quant à eux un peu de théorie de la mesure.

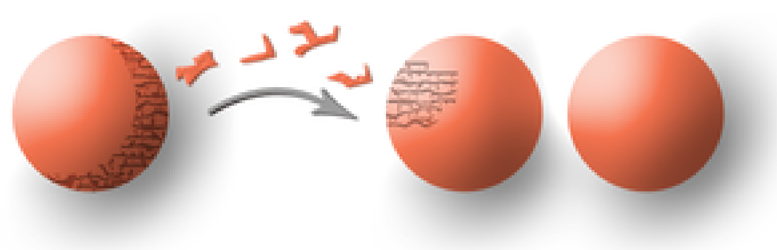
Il est important de noter que l'axiome du choix joue un rôle prépondérant dans ce théorème, et que ce dernier a été une des premières "grandes" applications de cet axiome. C'est notamment le paradoxe de Banach-Tarski qui a découragé de nombreux mathématiciens (Lebesgue [2] par exemple) de recourir trop souvent à l'axiome du choix. Tous les théorèmes dont la démonstration invoque l'axiome du choix (ou un autre résultat dont la démonstration l'utilise) seront suivis d'un (AC).

[1] Les biographies de Hausdorff, Banach et Tarski sont données en annexe.

[2] Henri Léon Lebesgue (1875-1941) - Mathématicien français.

Ce mémoire est divisé en deux parties. Après une courte introduction, nous présenterons plusieurs notions, notamment celle d'équidécomposabilité, ou encore la notion d'ensembles dédoublables (notation de M. Guinot) ou paradoxaux (notation de S. Wagon). A partir des quelques propriétés de ces relations, nous en déduirons rapidement le paradoxe de la sphère, dû à Hausdorff, qui nous dit qu'une "moitié" de sphère est superposable à un "tiers" de cette même sphère... Etrange, non ? Enfin, nous aboutirons au paradoxe de Banach-Tarski, d'abord dans sa version faible puis dans sa version forte, citée au premier paragraphe. En guise de deuxième partie, nous ferons quelques remarques sur la démonstration et quelques compléments, avant de nous lancer dans l'étude des conséquences les plus importantes du paradoxe de Banach-Tarski. Nous verrons par exemple qu'il a motivé l'invention de la mesure de Lebesgue. Pour conclure, nous verrons quels sont les problèmes liés au paradoxe de Banach-Tarski qui sont toujours ouverts.

Je ne peux bien entendu pas commencer sans adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de mémoire, M. Emery, qui m'a guidé et aidé tout au long de la rédaction de ce mémoire, à mes collègues et amis étudiants pour leur sympathie, leur soutien et leurs conseils avisés, à ma famille pour m'avoir beaucoup poussé au travail, sans quoi je n'aurais pas beaucoup avancé, et enfin à mes professeurs de mathématiques, actuels et passés, qui font de leur mieux pour enseigner la plus noble des sciences.



*A mes parents.*

*Qu'est-ce qu'un paradoxe, sinon une vérité opposée aux préjugés du vulgaire. (Denis Diderot - Pensées Philosophiques)*

# Table des matières

# Introduction

## Paradoxe ?

Un rapide coup d'œil dans le Petit Robert nous donne la définition suivante :

**Paradoxe (n.m.).** *1) Opinion qui va à l'encontre de l'opinion communément admise.*
*2) Etre, chose ou fait qui heurte le bon sens. Contresens, absurdité.*
*3) Se dit d'une proposition à la fois vraie et fausse, antinomie, contradiction, sophisme.*

Ainsi il y a différentes définitions d'un paradoxe. La plus répandue est sans doute la troisième, celle du paradoxe logique comme le paradoxe du menteur : *"Je mens"*, ou celui du barbier, de Russell[3].

Pour la culture générale, indiquons par exemple que le paradoxe du menteur a inspiré Tarski, en plus des travaux de Gödel[4] sur les célèbres théorèmes d'incomplétude, pour son théorème de non-définissabilité, appelé "théorème de Tarski"[5].

La définition qui va nous intéresser ici est la première. En effet, si le paradoxe de Banach-Tarski va à l'encontre de l'intuition commune et surprend, voire dérange, il n'en demeure pas moins un résultat mathématique démontré et vrai dans le cadre de l'axiomatique ZFC. Il s'agit donc de ne pas se laisser entrainer à croire qu'il y a une erreur dissimulée ici ou là, non, *tout ce qui va suivre est bel et bien mathématiquement vrai.* Ce paradoxe ne fait que traduire le fait que notre monde physique n'est pas "continu" comme l'est l'espace $\mathbb{R}^3$.

[3] Bertrand Russell (1872-1970) - Logicien, philosophe et moraliste anglais.
[4] Kurt Gödel (1906-1978) - Mathématicien et logicien autrichien.
[5] Voir par exemple Wikipédia - Théorème de Tarski.

# L'axiome du choix

Avant de nous intéresser aux ensembles paradoxaux et au théorème de Banach-Tarski, nous allons évoquer rapidement le pilier de la démonstration, celui qui va faire naitre le paradoxe, l'axiome du choix :

**Axiome du choix.**

$$(\forall X)[X \neq \emptyset \wedge (\emptyset \notin X)] \Rightarrow [\exists f : X \to \bigcup_{Y \in X} Y, \forall x \in X, f(x) \in x].$$

Intuitivement, il signifie que toute famille non vide d'ensembles non vides possède une fonction de choix, c'est-à-dire une fonction qui à chacun des ensembles de cette famille associe un de ses éléments. Il existe des énoncés équivalents :

**Autre formulation de l'axiome du choix.**

$$(\forall X)\,[X \neq \emptyset \wedge (\emptyset \notin X)] \Rightarrow \prod_{y \in X} y \neq \emptyset$$

*Autrement dit, le produit d'une famille non vide d'ensembles non vides est non vide.*

**Théorème de Zermelo (AC).** *Tout ensemble non vide est bien ordonnable.*

**Lemme de Zorn (AC).** *Tout ensemble inductif et non vide admet un élément maximal.*

Nous ne nous attarderons pas sur ces énoncés, qui ne sont donnés ici qu'à titre d'information. Il est par contre important de souligner le fait que si l'axiome du choix affirme l'existence d'une fonction de choix, *il n'en donne aucune construction.*

Par exemple, le lemme de Zorn[6] permet de prouver que tout espace vectoriel sur un corps commutatif (même de dimension infinie) admet une base, mais ne permet pas de déterminer une telle base. L'axiome du choix est donc limité de ce point de vue.

Il a été prouvé que l'axiome du choix n'est ni réfutable (Gödel, 1938), ni démontrable (Cohen[7], 1963) et donc qu'il est indépendant des axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (notée ZF). ZF accompagnée de l'axiome du choix est notée ZFC.

Nous étudierons plus en détail le lien entre l'axiome du choix et le paradoxe de Banach-Tarski dans la deuxième partie de ce mémoire.

[6]Max Zorn (1906-1993) - Mathématicien allemand.
[7]Paul Cohen (1934-2007) - Mathématicien américain.

# Quelques remarques préliminaires

Tâchons de rendre le paradoxe de Banach-Tarski moins... paradoxal. Pour cela, je vais faire quelques remarques, dont certaines seront approfondies en deuxième partie :

① Il est impossible de réaliser physiquement la "décomposition paradoxale" de la boule, ni même de l'imaginer.

② On ne peut pas se dire *"Le volume de la boule d'arrivée doit être égal à la somme des volumes des morceaux, qui doit être elle-même égale au volume de la boule de départ"*. En effet, les morceaux obtenus par le découpage paradoxal sont non-mesurables, on ne peut pas parler de volume dans leur cas, et c'est là le point crucial qui va permettre de déduire certaines conséquences du paradoxe de Banach-Tarski. Cela est dû au fait que la fonction qu'il faudrait intégrer pour calculer leur volume n'est justement pas intégrable. Un exemple de fonction non-mesurable serait une fonction $f$ qui prend *toutes* les valeurs réelles sur n'importe quel intervalle, aussi petit soit-il, non vide et non réduit à un point.

③ On peut se faire une petite idée de la méthode utilisée en considérant l'exemple simple suivant : Soit $O$ le centre de la boule unité $B$, et soit $I$ un point tel que $OI = \frac{1}{2}$. Soit $\varphi$ une rotation de centre $I$ et d'angle $\theta$ tel que $\frac{\theta}{\pi}$ soit irrationnel. Alors $O_0 = O$, $O_1 = \varphi(O)$, $O_2 = \varphi(O_1)$, etc... sont tous distincts puisque si on avait $O_m = O_n$ avec $m > n$ alors on aurait $O_{m-n} = O_0$ donc $(m-n)\theta = 2k\pi$, ce qui contredit l'irrationnalité de $\frac{\theta}{\pi}$. On appelle $A_0$ l'ensemble (dénombrable) de tous ces points : $A_0 = \{O_i \setminus i \in \mathbb{N}\}$. On a clairement $\varphi(A_0) = A_0 \setminus \{O\}$. Soit alors $A_1$ le complémentaire de $A_0$ dans la boule unité. On a découpé la boule unité $B$ en deux morceaux $A_0$ et $A_1$ et on a trouvé un déplacement $\varphi$ tel que $\varphi(A_0) \cup A_1$ soit la boule unité privée de son centre. Il est assez facile de voir que ce même raisonnement permet de faire disparaitre un segment ou même une partie de plan. On peut alors supposer que le même genre d'astuce peut permettre de faire apparaitre un petit volume. Il y a des différences notables, comme justement la mesurabilité des morceaux, mais l'idée y est.

④ Cinq morceaux suffisent pour transformer une boule en deux boules, et quatre pour transformer une sphère en deux sphères.

⑤ Le paradoxe n'est pas valable dans le plan ni dans la droite (c'est le paradoxe de la sphère qui n'est plus valable). Il l'est par contre dans toutes les dimensions supérieures à 3.

Comme j'en ai déjà trop dit et que vous devez sûrement trépigner d'impatience, il est temps, je pense, d'aborder le coeur du problème.

# Première partie

# Le paradoxe de Banach-Tarski

Chapitre 1

# Equidécomposabilité

## 1.1 Quelques rappels

Commençons par donner en vrac quelques définitions et propriétés, extrêmement classiques et sans doute connues, mais qu'il ne fait pas de mal de rappeler.

**1.1.1 Définition.** Un ensemble $D$ est dit (au plus) *dénombrable* s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans $D$, ou, ce qui revient au même, une injection de $D$ dans $\mathbb{N}$.

**1.1.2 Théorème.** *Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*

**1.1.3 Théorème. (AC)** *La réunion de toute famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

**1.1.4 Définition.** On dit qu'un groupe $G$ *opère* sur un ensemble $X$ si on se donne une application $G \times X \longrightarrow X$ (appelée *loi d'opération*), par laquelle l'image d'un couple $(g, x)$ (avec $g \in G$ et $x \in X$) sera notée $gx$, vérifiant d'une part $1x = x$ pour tout $x \in X$ et d'autre part $(gg')x = g(g'x)$ pour tous $g$ et $g'$ de $G$ et $x$ de $X$.

**Exemple important.** Considérons un groupe $G$ et un sous-groupe $H$ de $G$. Alors, la loi $(h, g) \mapsto hg$ (où $h \in H$, $g \in G$ et où $hg$ est tout simplement le produit de $h$ et $g$ dans le groupe $G$) est une loi d'opération du groupe $H$ sur l'ensemble $G$. On dit alors que *$H$ opère sur $G$ par translations*. Un groupe $G$ quelconque apparaît ainsi comme un *"champ opératoire"* de chacun de ses sous-groupes, et en particulier du groupe $G$ lui-même.

## 1.2 Equidécomposabilité

**1.2.1 Définition.** Soit $G$ un groupe quelconque opérant sur un ensemble $X$ quelconque, et soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $X$. On dit que $A$ et $B$ sont équivalents par décomposition finie (ou *équidécomposables*) sous l'action de $G$ s'il existe un entier $n$ dans $\mathbb{N}^*$, une partition $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de $A$, une partition $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ de $B$ et des éléments $g_1, ..., g_n$ de $G$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ et $B_i = g_i A_i$ pour tout $i = 1, ..., n$.

**1.2.2 Définition.** Si $E$ et $F$ sont deux parties de $X$ et s'il existe $g \in G$ tel que $F = gE$, on dit que $E$ et $F$ sont *congruents* (dans $X$) relativement à $G$, ou sous l'action de $G$.

Dans toute la suite, nous ommetrons parfois de mentionner sous l'action de quel groupe deux ensembles sont congruents ou équidécomposables, soit car celui-ci est évident, soit car cela n'a pas d'importance dans le résultat. De plus, nous appellerons toujours $X$ un ensemble quelconque et nous noterons $A \sim B$ pour dire que deux ensembles $A$ et $B$ sont équidécomposables.

Notons également qu'avec ces définitions, deux ensembles équidécomposables sont en quelque sorte "congruents par morceaux".

**1.2.3 Définition.** Lorsque $X = \mathbb{R}^n$ et lorsque $G$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$, deux ensembles congruents sont dits *isométriques*.

**Remarque.** *Deux ensembles congruents sont équidécomposables.*

Nous allons maintenant pouvoir établir quelques propriétés élémentaires, qui nous seront très utiles dans toute la suite de ce mémoire.

**1.2.4 Théorème.** *La relation d'équidécomposabilité est une relation d'équivalence entre les parties de $X$.*

*Démonstration.* Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties de $X$. Puisque $1A = A$, il est clair que $A \sim A$ ($A$ est congruent à $A$).

Supposons maintenant $A \sim B$. Alors en utilisant la définition de l'équidécomposabilité et en appliquant les opérateurs réciproques $g_i^{-1}$ aux sous-ensembles $B_i = g_i A_i$ de $B$, on obtient immédiatement que $B \sim A$.

Reste à montrer la transitivité. Pour cela, supposons $A \sim B$ et $B \sim C$. On peut alors écrire :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ , \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad et \quad B_i = g_i A_i$$

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} B'_j \ , \quad C = \bigcup_{j=1}^{m} C_j \quad et \quad C_j = h_j B'_j$$

où les $A_i$ (resp. $B_i$, $B'_j$, $C_j$) sont deux à deux disjoints, et où les $g_i$, $h_j$ sont dans $G$.

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, posons :

$$A_{ij} = g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \ \text{ et } \ C_{ij} = h_j(B_i \cap B'_j).$$

Si $i \neq k$, on voit que $g_i^{-1} B_i = A_i$ et $g_k^{-1} B_k = A_k$, d'où l'on a :

$$A_{ij} \subset A_i \ \text{ et } \ A_{kl} \subset A_k.$$

On en déduit que $A_{ij} \cap A_{kl} = \emptyset$ puisque $A_i \cap A_k = \emptyset$.

Si $i = k$ et $j \neq l$, on a $(B_i \cap B'_j) \cap (B_k \cap B'_l) = B_i \cap (B'_j \cap B'_l) = \emptyset$ et alors :

$$A_{ij} \cap A_{kl} = g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \cap g_i^{-1}(B_k \cap B'_l) = \emptyset.$$

Par conséquent, les ensembles $A_{ij}$ sont deux à deux disjoints. Un raisonnement analogue montre que les ensembles $C_{ij}$ sont également deux à deux disjoints. De plus,

$$\bigcup_{i,j} A_{ij} = \bigcup_{i=1}^{n} \left( \bigcup_{j=1}^{m} A_{ij} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left( \bigcup_{j=1}^{m} g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left( g_i^{-1} \left( \bigcup_{j=1}^{m} (B_i \cap B'_j) \right) \right).$$

Mais puisque $\bigcup_{j=1}^{m} (B_i \cap B'_j) = B \cap B_i = B_i$, il vient :

$$\bigcup_{i,j} A_{ij} = \bigcup_{i=1}^{n} g_i^{-1}(B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

On montre de même que $\bigcup_{i,j} C_{ij} = C$.

Enfin, on conclut en voyant que $(h_j g_i) A_{ij} = h_j(g_i A_{ij}) = h_j(B_i \cap B'_j) = C_{ij}$. $\square$

**1.2.5 Théorème.** *Soient $A$, $A'$, $B$ et $B'$ des parties de $X$ telles que $A \cap A' = \emptyset$ et $B \cap B' = \emptyset$. Si $A \sim B$ et $A' \sim B'$, alors $(A \cup A') \sim (B \cup B')$.*

*Démonstration.* Puisque $A \sim B$ et $A' \sim B'$, il existe des familles d'ensembles deux à deux disjoints $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(A'_j)_{1 \leq j \leq m}$ et $(B'_j)_{1 \leq j \leq m}$, ainsi que des éléments $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m$ du groupe $G$ tels que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ , \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad et \quad B_i = g_i A_i$$

$$A' = \bigcup_{j=1}^{m} A'_j \ , \quad B' = \bigcup_{j=1}^{m} B'_j \quad et \quad B'_j = h_j A'_j$$

Comme $A \cap A' = \emptyset$ et $B \cap B' = \emptyset$, on voit immédiatement que $A \cup A'$ et $B \cup B'$ peuvent être considérés comme équidécomposables sous l'action de $G$ en utilisant d'une part la suite $A_1, ..., A_n, A'_1, ..., A'_m$ , la suite $B_1, ..., B_n, B'_1, ..., B'_m$ d'autre part, et les éléments $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m$ de $G$, dans cet ordre. □

On peut généraliser le théorème 1.2.5 par récurrence :

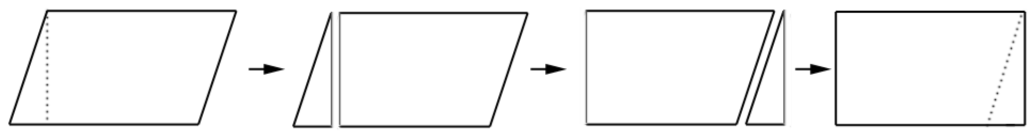
**1.2.6 Théorème.** *Soient $A_1, ..., A_n$ deux à deux disjoints et $B_1, ..., B_n$ deux à deux disjoints des parties de $X$. Si pour tout $i = 1, ..., n$ on a $A_i \sim B_i$, alors :*

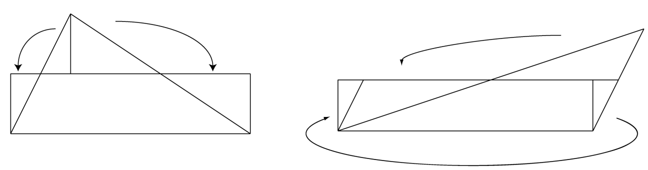
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

**1.2.7 Corollaire.** *Soient $A$, $B$ et $C$ des parties de $X$. Si $A \sim B$ et si $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, alors $(A \cup C) \sim (B \cup C)$.*

## 1.3 Le cas du plan

Il suffit d'être allé à l'école primaire (ou tout du moins cela suffisait il y a encore quelques années...) pour savoir que deux polygones $P$ et $Q$ du plan ont nécessairement la même aire si on peut découper $P$ en un nombre fini de morceaux, eux-mêmes des polygones, qui forment $Q$ quand on les réassemble convenablement.





Ce que l'on sait moins souvent, c'est que ce résultat admet une réciproque : le théorème de Gerwien-Bolyai.

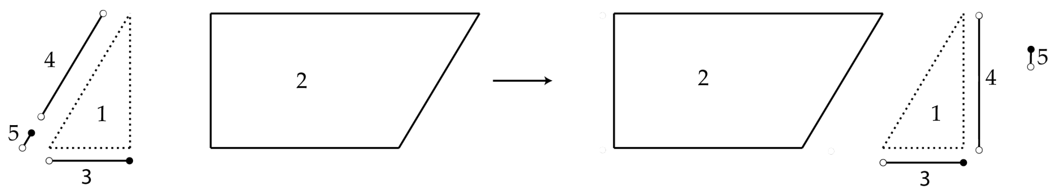
**Théorème de Gerwien-Bolyai.** *Pour que deux polygones du plan aient la même aire, il faut et il suffit qu'ils soient équivalents par découpage fini (ou dissection polygonale).*

La question de savoir si un théorème analogue existait dans l'espace fut posée par Hilbert [1] en 1900 : c'est le troisième problème de Hilbert. Mais contrairement à beaucoup d'autres problèmes, ce dernier fut résolu rapidement par l'un de ses élèves, Max Dehn, qui apporta une réponse négative au problème. Par exemple, un cube et un tétraèdre de même volume ne sont pas équivalents par découpage fini.

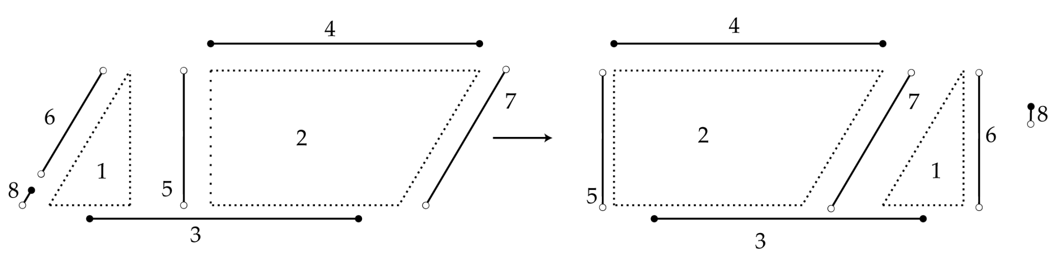
[1] David Hilbert (1862-1943) - Mathématicien allemand.

Pour autant, la méthode de découpage fini n'est pas tout à fait semblable à celui qui intervient dans la notion d'équidécomposabilité. Dans le premier cas, les "bords" des polygones sont supposés négligeables, alors que dans l'équidécomposabilité, les morceaux utilisés sont parfaitement disjoints. Voyons un exemple précis pour mieux comprendre le problème qui intervient alors.

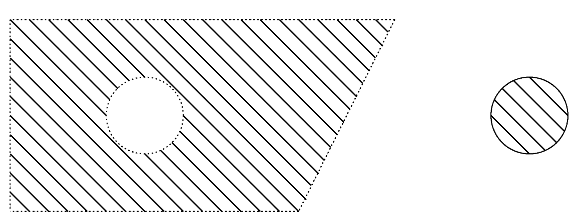
Tentons de transformer un parallélogramme en rectangle à l'aide de morceaux parfaitement disjoints :




Les bords gênent péniblement... On peut bien sûr "découper" les segments gênants pour former le rectangle d'arrivée, mais alors il reste un petit bout de segment qu'on ne sait pas où "caser" dans le rectangle :

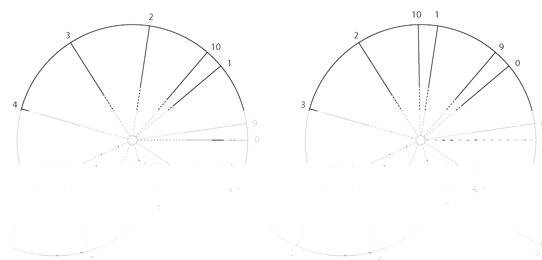


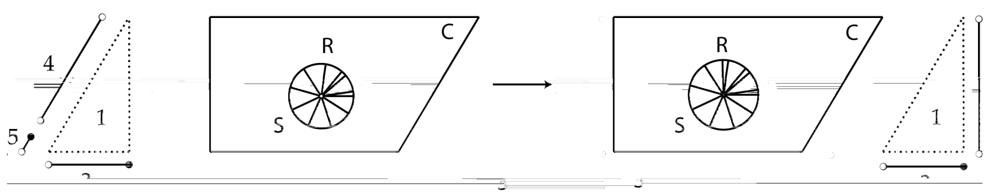

On pourrait alors croire que nos deux figures ne sont pas vraiment équidécomposables... Il y a toutefois une petite astuce qui va jouer en notre faveur. Soit $D$ un disque fermé de rayon la longueur du morceau de segment gênant, et inclus dans le polygone 2. Soit $C$ le complémentaire de $D$ dans ce polygone 2.



Choisissons dans le disque un de ses rayons, que l'on notera $R$. Soit alors $\phi$ une rotation d'angle $\theta$ et de centre le centre $O$ du disque $D$.

Si l'angle $\theta$ est irrationnel, alors il n'existe aucun entier strictement positif $n$ tel que $\phi^n(R) = R$. Autrement dit, on ne revient jamais au point de départ, peu importe le nombre de fois qu'on applique la rotation à $R$. Plus impressionnant même, si on retire le point $O$ à chacun des segments obtenus par itérations successives, on obtient des segments tous disjoints. Finalement, si on réapplique $\phi$ à $\{\phi^n(R) \setminus n \in \mathbb{N}\}$, on décale tous les rayons d'un cran, ce qui libère une place dans laquelle on peut disposer le segment qui nous dérangeait.






Exprimons cela par un théorème :

**1.3.1 Théorème.** *Si deux polygones $P$ et $Q$ sont équivalents par découpage, ils sont aussi équidécomposables (sous l'action du groupe des isométries du plan).*

La démonstration va nécessiter un lemme.

**1.3.2 Lemme.** *Si $A$ est un ensemble du plan d'intérieur non vide et si $T$ est la réunion d'un nombre fini de segments tous disjoints de $A$, alors $A \cup T \sim A$.*

*Démonstration.* Commençons par démontrer le lemme :

Les segments considérés peuvent être supposées deux à deux disjoints, quitte à les subdiviser. Soit alors un disque fermé $D$ contenu dans $A$ (c'est possible car $A$ est d'intérieur non vide), de centre $a$ et de rayon $r$.

On peut supposer, quitte à subdiviser les segments encore une fois, que la longueur de chaque segment est inférieure à $r$. Soit $S$ l'un de ces segments et soit $R$ un rayon du disque $D$ privé de son extrémité $a$.

Puisque la longueur de $R$ est supérieure à celle de $S$, on peut considérer un segment $S'$ contenu dans $R$ et isométrique à $S$. Si l'on considère alors comme précédemment une rotation $\phi$ de centre $a$ dont l'angle est un irrationnel, on voit facilement que les segments $S', \phi(S'), ...$ sont deux à deux disjoints, et comme précédémment, on voit en posant $\bar{S} = S' \cup \phi(S') \cup ... \phi^n(S') \cup ...$, que l'on a :

$$\phi(\bar{S}) = \bar{S} \setminus S'.$$

La place libérée peut alors être occupée par $S$. Plus précisément, $\bar{S}$ est équidécomposable à $\bar{S} \cup S$.

On a alors d'après le corollaire 1.2.7 que $A \sim A \cup S$.

Maintenant, ce qu'on a fait avec le segment $S = S_0$ et avec $A$, on peut le refaire avec un second segment $S_1$ de $T$ et avec $A \cup S_0$ puisque $S_1$ n'a pas de point commun avec $S_0$ et puisque $A \cup S_0$ n'est pas vide. On a donc $A \sim A \cup S = A \cup S_0 \sim A \cup S_0 \cup S_1$ et donc $A \sim A \cup S_0 \cup S_1$ par transitivité.

Une bête récurrence permet alors de conclure. Reste alors à démontrer le théorème :

Supposons que $P$ et $Q$ admettent des “décompositions” en polygones $P_1, ..., P_n$ et $Q_1, ..., Q_n$ telles que $P_i$ et $Q_i$ soient isométriques pour tout $i = 1, ..., n$.

Appelons $P'_1, ..., P'_n$ et $Q'_1, ..., Q'_n$ les intérieurs de ces polygones (c'est-à-dire qu'on a retiré leurs côtés). Il est clair que les ensembles $P' = \bigcup_{i=1}^{n} P'_i$ et $Q' = \bigcup_{i=1}^{n} Q'_i$ sont équidécomposables.

Comme $P$ et $P'$ (ou $Q$ et $Q'$) ne diffèrent l'un de l'autre que par un nombre fini de segments, le lemme nous permet de conclure. □

Ainsi, compte tenu du théorème de Gerwien-Bolyai, on peut dire que deux polygones de même aire sont toujours équidécomposables.

Chapitre 2

# Ensembles dédoublables

## 2.1 Définitions et premiers résultats

**2.1.1 Définition.** Soit $G$ un groupe opérant sur un ensemble $X$ et soit $E$ un sous-ensemble de $X$. On dit que $E$ est un ensemble *dédoublable* dans $X$ sous l'action de $G$, ou bien *$G$-paradoxal*, s'il existe deux parties complémentaires $A$ et $B$ de $E$ telles que $A \sim E$ et $B \sim E$. Le couple $(A, B)$ est alors appelé une *décomposition paradoxale* de $E$.

Cette définition est employée par M. Guinot et c'est celle que nous emploierons par la suite. La définition de S. Wagon est équivalente (ce n'est pas forcément évident) mais plus lourde à utiliser :

**2.1.2 Définition.** Soit $G$ un groupe opérant sur un ensemble $X$ et soit $E$ un sous-ensemble de $X$. On dit que $E$ est un ensemble dédoublable dans $X$ sous l'action de $G$, ou $G$-paradoxal, s'il existe deux entiers $m$, $n$, des sous-ensembles $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ de $E$ deux à deux disjoints et des éléments $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m$ du groupe $G$ tels que :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j.$$

Supposons pour l'instant, sans savoir encore si c'est possible ou non, qu'il existe un sous-ensemble de $X = \mathbb{R}^n$ qui soit dédoublable. On comprend facilement la dénomination d'ensemble paradoxal : cela signifierait qu'on puisse découper un ensemble en deux morceaux qui seraient tous deux isométriques à l'ensemble tout entier !

Comme pour l'équidécomposabilité, et pour les mêmes raisons, nous ommetrons régulièrement de mentionner le groupe $G$ sous l'action duquel un ensemble est dédoublable. Cela dit, nous pouvons commencer à énoncer quelques résultats.

**2.1.3 Théorème.** *Soient $E$ et $F$ deux sous-ensembles de $X$. Si $E$ est dédoublable et si $E \sim F$, alors $F$ est dédoublable.*

*Démonstration.* Comme $E \sim F$, on a par définition l'existence de $E_1, ..., E_n$ deux à deux disjoints, $F_1, ..., F_n$ deux à deux disjoints et des éléments $g_1, ..., g_n$ du groupe $G$ tels que :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \ , \quad F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \quad et \quad F_i = g_i E_i.$$

On peut donc définir une application $g$ de $E$ dans $X$ telle que la restriction de $g$ à $E_i$ soit égale à $\bar{g}_i$, où $\bar{g}_i$ est l'application (bijective) de $X$ dans $X$ qui à $x$ associe $g_i x$ (c'est l'application associée à l'opérateur $g_i$). Comme $\bar{g}_i$ est bijective de $E_i$ dans $F_i$ et que les ensembles $F_i$ forment une partition de $F$, $g$ est une bijection de $E$ dans $F$. Il s'agit maintenant de montrer que si $C$ est une partie de $E$, $C \sim g(C)$. En effet, $C = \bigcup_{i=1}^{n}(C \cap E_i)$ et $g(C) = \bigcup_{i=1}^{n}(g(C) \cap F_i)$ où les ensembles $C \cap E_i$ et $g(C) \cap F_i$ sont deux à deux disjoints. Or on a

$$g_i(C \cap E_i) = \bar{g}_i(C \cap E_i) = g(C \cap E_i) = g(C) \cap g(E_i) = g(C) \cap \bar{g}_i(E_i) = g(C) \cap F_i,$$

ce qui nous donne le résultat cherché.

Considérons maintenant une décomposition paradoxale $(A, B)$ de $E$. Comme $g : E \longrightarrow F$ est bijective, $g(A)$ et $g(B)$ sont deux parties complémentaires de $F$ et l'on a, d'après ce qui précède, $A \sim g(A)$ et $B \sim g(B)$.

Par transitivité, on a aussi $g(A) \sim F$ et $g(B) \sim F$. □

**2.1.4 Corollaire.** *Si $E$ est un ensemble dédoublable, il existe pour tout $n \geq 2$ une partition $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $E$ telle que, pour tout $i = 1, ..., n$, on ait $A_i \sim E$.*

*Démonstration.* On a par hypothèse qu'il existe $A$ et $B$ deux parties complémentaires de $E$ telles que $A \sim E$ et $B \sim E$.

D'après le théorème 2.1.3 précédent, $A$ est dédoublable à son tour, et il existe deux parties complémentaires $A_1, A_2$ de $A$ telles que $A_1 \sim A$ et $A_2 \sim A$. On a donc, puisque $\sim$ est une relation d'équivalence, que $A_1 \sim E$, $A_2 \sim E$ et $B \sim E$ où $A_1, A_2, B$ forment une partition de $E$. En procédant ainsi par récurrence, on obtient le résultat. □

**2.1.5 Théorème.** *Si un sous-ensemble borné $E$ de $\mathbb{R}^m$ est dédoublable sous l'action du groupe des isométries de $\mathbb{R}^m$, il existe, pour tout entier $n \geq 2$, $n$ ensembles bornés $E_1, ..., E_n$ dans $\mathbb{R}^m$, tous isométriques à $E$ (congruents à $E$, donc), deux à deux disjoints, et tels que $E \sim \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.*

*Démonstration.* Puisque $E$ est borné, on peut facilement trouver $n$ ensembles $E_1, ..., E_n$ dans $\mathbb{R}^m$, tous isométriques à $E$ et deux à deux disjoints. On a donc pour tout $i = 1, ..., n$, $E \sim E_i$.

D'autre part, puisque $E$ est dédoublable, on peut écrire :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

où les ensembles $A_i$ sont deux à deux disjoints et équidécomposables à $E$ (d'après le corollaire 2.1.4). On a donc pour tout $i = 1, ..., n$, $A_i \sim E \sim E_i$. Comme les $A_i$ sont deux à deux disjoints, ainsi que les $E_i$, on a d'après le théorème 1.2.6 :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim \bigcup_{i=1}^{n} E_i,$$

ce qui est le résultat souhaité. □

## 2.2 Quelques cas particuliers

Commençons par étudier quelques cas “exotiques”, et en premier lieu le cas où le groupe $G$ d'opérateurs utilisé est le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$.

**2.2.1 Théorème.** *Tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux points est dédoublable dans $\mathbb{R}$ sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$.*

*Démonstration.* Commençons par le cas d'un intervalle $[a, b[$, où $a < b$.

Soit $c$ le milieu de $[a, b[$. On a $[a, b[= [a, c[ \cup [c, b[$ où $[a, c[$ et $[c, b[$ sont disjoints.

L'homothétie de centre $a$ (resp. de centre $b$) et de rapport 2 est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui transforme $[a, c[$ (resp. $[c, b[$) en $[a, b[$. Ainsi, $[a, c[$ et $[c, b[$ sont tous deux équidécomposables à $[a, b[$, d'où le résultat.

Dans le cas d'un intervalle fermé $[a, b]$, on considère une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels distincts appartenant à $[a, b]$ et telle que $x_1 = b$. Soit maintenant une autre suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels distincts mais n'appartenant pas à $[a, b]$.

On définit alors une application $g$ telle que $g(x_n) = x_{n+1}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $g(y_n) = y_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, $g(y_1) = b$ et $g(x) = x$ pour tout $x$ réel n'appartenant à aucune des deux suites définies précédemment.

On a alors défini une fonction $g$ bijective ($g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$) telle que $g([a, b]) = [a, b[$, ce qui prouve que $[a, b]$ est équidécomposable à $[a, b[$ sous l'action de $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 2.1.3 pour avoir le résultat.

Pour un intervalle ouvert, on procède de la même façon en montrant que $]a, b[$ est équidécomposable à $[a, b[$ et en appliquant le théorème 2.1.3. □

Un autre cas particulier intéressant est le théorème suivant, que nous ne démontrerons pas :

**2.2.2 Théorème.** *Tout polygone du plan est dédoublable sous l'action du groupe des similitudes.*

Enfin, énonçons le paradoxe de Sierpinski[1]-Mazurkiewicz[2], qui est également assez surprenant, et dont la démonstration sera là aussi occultée, en raison de sa longueur et car ce n'est pas là le but de ce mémoire.

**Paradoxe de Sierpinski-Mazurkiewicz.** *Dans le plan $\mathbb{C}$ des nombres complexes, si $u$ est un nombre transcendant de module 1, l'ensemble $E$ des éléments de la forme $a_0 + a_1 u + ... + a_n u^n$ où $n$ est quelconque et où les coefficients $a_i$ sont des entiers naturels, est un ensemble dédoublable sous l'action du groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$.*

Il est à noter que l'ensemble $E$ de ce théorème est dénombrable, donc de mesure nulle au sens de Lebesgue, et il n'y a donc pas de contradiction dans ce cas avec la notion de mesure (ou d'aire).

[1] Waclaw Sierpinski (1882-1969) - Mathématicien polonais.
[2] Stefan Mazurkiewicz (1888-1945) - Mathématicien polonais.

## 2.3 Groupes dédoublables

**2.3.1 Définition.** On dit que deux éléments $a$ et $b$ d'un groupe $G$ sont *indépendants* si les éléments $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ de $G$ sont tous distincts et si pour tout $n > 2$ et pour toute liste d'éléments $(g_1, ..., g_n)$ de $G$ tous égaux à $a, b, a^{-1}$ ou $b^{-1}$, il est impossible d'avoir $g_1...g_n = 1$ si $g_i g_{i+1} \neq 1$ pour $i = 1, ..., n-1$.

**2.3.2 Définition.** Une telle liste (à ne pas confondre avec une famille : l'ordre des éléments est important) $(g_1, ..., g_n)$ d'éléments de $G$ égaux à $a, b, a^{-1}$ ou $b^{-1}$ est appelé un *mot*. $n$ est appelé la *longueur* du mot : si $n = 0$ on dit que le mot est *vide*.

**2.3.3 Définition.** Un mot est dit *réduit* s'il n'y a pas dans le mot deux éléments consécutifs qui soient inverses l'un de l'autre.

**2.3.4 Définition.** Si un groupe $G$ est engendré par deux éléments $a$ et $b$ indépendants, on dit que $G$ est *librement engendré* par $a$ et $b$. Dans ce cas tout élément de $G$ est représenté par un mot. $G$ est alors appelé un *groupe libre de rang* 2.

**Remarque.** *Un groupe libre de rang* 2 *ne peut pas être abélien.*

**2.3.5 Définition.** Un groupe $G$ est dit *dédoublable* ou *paradoxal* s'il est dédoublable sous l'action de ses translations.

On a alors le résultat très utile suivant :

**2.3.6 Théorème.** *Un groupe libre de rang* 2 *est dédoublable.*

*Démonstration.* Soient $a$ et $b$ deux éléments de $G$ qui l'engendrent librement. Soit $g$ l'un des quatre éléments $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ et appelons $M(g)$ l'ensemble des éléments de $G$ qui peuvent s'écrire sous forme de mots réduits commençant par $g$. Ces mots ne sont pas vides et ne peuvent donc pas représenter 1.

Soit maintenant $h \neq g$. Supposons que $M(g) \cap M(h) \neq \emptyset$. Alors on aurait $gx_1...x_m = hy_1...y_n$ où $(g, x_1, ..., x_m)$ et $(h, y_1, ..., y_n)$ seraient des mots réduits. Comme $g \neq h$, on a $h^{-1}g \neq 1$ et donc le mot $(y_n^{-1}, ..., y_1^{-1}, h^{-1}, g, x_1, ..., x_m)$ est lui aussi réduit. Or d'après la définition 2.3.1 on ne peut pas avoir $y_n^{-1}...y_1^{-1}h^{-1}gx_1...x_m = 1$, ce qui contredit l'égalité $gx_1...x_m = hy_1...y_n$. Par conséquent, si $g \neq h$, alors $M(g) \cap M(h) = \emptyset$.

On a ainsi montré que les ensembles $\{1\}, M(a), M(b), M(a^{-1})$ et $M(b^{-1})$ sont deux à deux disjoints. Comme tout élément de $G$ peut être représenté par un mot réduit, on voit que $G = M(a) \cup M(b) \cup M(a^{-1}) \cup M(b^{-1}) \cup \{1\}$.

Considérons maintenant l'ensemble $a^{-1}M(a)$. Un élément $x$ de cet ensemble s'écrit $a^{-1}ax_1...x_n$ où le mot $(a, x_1, ..., x_n)$ est réduit. Alors $x_1$ est nécessairement distinct de $a^{-1}$, sinon le mot ne serait pas réduit. On voit facilement qu'on a l'inclusion

$$a^{-1}M(a) \subset (M(a) \cup M(b) \cup M(b^{-1}) \cup \{1\}).$$

Inversement, si $x \in (M(a) \cup M(b) \cup M(b^{-1}) \cup \{1\})$, on a $x = x_1...x_n$ où $(x_1, ..., x_n)$ est soit le mot vide soit un mot non vide et réduit, commençant ou par $a$ ou par $b$ ou par $b^{-1}$. Dans tous les cas, le mot $(a, x_1, ..., x_n)$ est réduit et donc $x \in a^{-1}M(a)$.

On a donc finalement $a^{-1}M(a) = G \setminus M(a^{-1})$ et donc $G = M(a^{-1}) \cup a^{-1}M(a)$ et cette réunion est disjointe.

Ensuite, puisque $a^{-1}M(a)$ est congruent à $M(a)$ (pour les translations) et puisque $M(a^{-1})$ est congruent à lui-même, on a d'après le théorème 1.2.6 que
$G \sim (M(a) \cup M(a^{-1}))$.

On montre alors de la même façon que $G \sim (M(b) \cup M(b^{-1}))$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $M(a) \sim (M(a) \cup \{1\})$. Pour cela, on partage $M(a)$ en deux ensembles. Soit $E$ l'ensemble formé des puissances de $a$ et $F$ son complémentaire. Si on applique à $E$ la translation $x \longrightarrow a^{-1}x$ et à $F$ l'opérateur identité de $G$, on obtient les ensembles disjoints $E \cup \{1\}$ et $F$, dont la réunion est $M(a) \cup \{1\}$. □

**2.3.7 Définition.** On dit qu'un groupe $G$ *opère librement* sur un ensemble $X$ (pour une loi $(g, x) \longrightarrow gx$) si pour tout $g \neq 1$ dans $G$ et pour tout $x \in X$, $gx \neq x$.

**2.3.8 Définition.** On dit qu'un groupe $G$ *opère transitivement* sur un ensemble $X$ si quels que soient $x$ et $y$ dans $X$, il existe $g \in G$ tel que $y = gx$.

Procédons à un petit rappel :

**2.3.9 Définition.** Soit un groupe $G$ opérant de manière quelconque sur un ensemble $X$. On considère la relation d'équivalence (vérification facile) sur X suivante :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G \setminus gx = y.$$

Les classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$ sont appelées les *orbites* résultant de l'action de $G$ sur $X$ et forment une partition de $X$.

**Remarque.** *Dire qu'un groupe $G$ opère transitivement sur $X$, c'est dire qu'il n'y a qu'une seule orbite, égale bien entendu à $X$. Si $G$ opère de façon quelconque sur $X$, $G$ opère transitivement dans chacune des orbites.*

Nous pouvons maintenant attaquer un résultat important pour la suite (ou tout du moins ses corollaires).

**2.3.10 Théorème. (AC)** *Si un groupe $G$ est dédoublable et s'il opère librement sur un ensemble $X$, alors $X$ est dédoublable sous l'action de $G$.*

*Démonstration.* Soit $x$ un élément de $X$ (qu'on suppose non vide). A tout ensemble $A \subset G$, associons l'ensemble $Ax$ des éléments de la forme $ax$ où $a$ parcourt $A$ ($Ax$ est une partie de l'orbite de $x$).

Choisissons maintenant dans chaque orbite de $X$ un élément et un seul (on peut le faire si on admet l'axiome du choix). Appelons $M$ l'ensemble ainsi constitué, et notons

$$A' = \bigcup_{x \in M} Ax$$

Nous allons maintenant établir quelques propriétés pour aboutir au résultat :

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $G$ et soit $z$ un élément de $(A \cup B)'$. Alors il existe $x \in M$ tel que $z \in (A \cup B)x$ et par conséquent il existe $g \in (A \cup B)$ tel que $z = gx$. Si $g \in A$, $z$ appartient à $Ax$, donc à $A'$. Si $g \in B$, $z$ appartient à $Bx$ donc à $B'$. Dans tous les cas, on a donc $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. L'inclusion réciproque est tout aussi facile à vérifier. On a donc la première propriété : $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Par une récurrence facile, on a alors pour tous $A_1, ..., A_n$ sous-ensembles de $G$ :

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$$

Supposons maintenant $A$ et $B$ disjoints. Si $z$ est un élément de $A' \cap B'$, alors il existe $x \in M$ et $y \in M$ tels que $z \in Ax$ et $z \in By$. On a nécessairement $x = y$ puisque sinon, $Gx$ et $Gy$ seraient des orbites distinctes, donc disjointes, et comme on a $Ax \subset Gx$ et $By \subset Gy$, on aurait $Ax \cap By = \emptyset$, ce qui est absurde puisque $z \in Ax \cap By$. Il existe donc $g \in A$ et $h \in B$ tels que $z = gx = hx$, donc $h^{-1}gx = x$. Puisque $G$ opère librement, cela n'est possible que si $g = h$, mais alors on a une contradiction avec $A \cap B = \emptyset$.

Supposons cette fois-ci $A$ et $B$ congruents dans $G$. Alors il existe $g \in G$ tel que $B = gA$. Si $z \in B'$, il existe $x \in M$ tel que $z \in Bx$ et par conséquent il existe $k \in B$ tel que $z = kx$. Comme $k$ est de la forme $gh$ où $h \in A$, on a $z = kx = (gh)x = g(hx)$. Mais puisque $hx \in Ax \subset A'$, on voit que $z \in gA'$.
L'inclusion réciproque se montre facilement également, et on a donc montré que si $A$ et $B$ sont congruents dans $G$, alors $A'$ et $B'$ sont congruents dans $X$.

Si $A$ et $B$ sont équidécomposables dans $G$, et si l'on se rappelle le fait que cela signifie que $A$ et $B$ sont en quelque sorte "congruents par morceaux", on voit d'après ce qui précède que $A'$ et $B'$ sont équidécomposables dans $X$.

Si $G$ est dédoublable, $G$ est équidécomposable, séparément, à deux sous-ensembles $A$ et $B$ tels que $(A \cup B) = G$ et $A \cap B = \emptyset$. On a alors $A' \cup B' = G'$ et $A' \cap B' = \emptyset$ et $G'$ est équidécomposable, séparément, à $A'$ et à $B'$.

Il suffit alors de voir que $G' = \bigcup_{x \in M} Gx = X$ pour conclure. □

**2.3.11 Corollaire. (AC)** *Un groupe $G$ qui contient un sous-groupe $H$ dédoublable est lui-même dédoublable.*

*Démonstration.* $H$ opère librement sur $G$ par translations, donc $G$ est dédoublable sous l'action de $H$. A fortiori, $G$ est dédoublable sous sa propre action, donc dédoublable. □

**2.3.12 Corollaire. (AC)** *Un groupe $G$ contenant deux éléments indépendants est dédoublable.*

*Démonstration.* En effet, le sous-groupe de $G$ engendré par ces éléments est un groupe libre de rang 2, donc dédoublable d'après le théorème 2.3.6, et le corollaire 2.3.11 permet de conclure. □

# Chapitre 3

# Le théorème de Banach-Tarski

## 3.1 Le paradoxe de la sphère de Hausdorff

Pour parvenir à montrer qu'une boule est dédoublable, nous allons commencer par montrer qu'il existe des éléments indépendants dans le groupe des isométries de l'espace. Ce seront en fait des rotations. Rappelons brièvement qu'une isométrie de $\mathbb{R}^3$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui conserve les distances. Nous noterons $SO_3$ le groupe spécial orthogonal de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire le groupe des rotations de centre l'origine de $\mathbb{R}^3$. Ce sont des applications linéaires de déterminant $+1$.

**3.1.1 Théorème.** *Le groupe $SO_3$ contient deux éléments indépendants.*

*Démonstration.* Considérons l'angle $\theta = \arccos(\frac{3}{5})$.

Appelons alors $r$ (resp. $s$) la rotation d'angle $\theta$ autour de l'axe des $z$ (resp. autour de l'axe des $x$).

Comme $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, on voit que $\sin(\theta) = \frac{4}{5}$.

Les matrices $A$ et $B$ des rotations $r$ et $s$, ainsi que leurs inverses, s'écrivent alors :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant une rotation $w$ représentée par un mot réduit non vide par rapport aux quatre "lettres" $r, s, r^{-1}, s^{-1}$. Il s'agit de montrer que $w \neq 1$ où 1 est l'identité de $\mathbb{R}^3$.

Supposons que le mot représentant $w$ (toujours supposé non vide) se termine par $r$ ou par $r^{-1}$. Appelons $k$ la longueur du mot représentant $w$. Montrons alors que $w(1,0,0)$ est de la forme $(\frac{a}{5^k}, \frac{b}{5^k}, \frac{c}{5^k})$ où $a, b, c$ sont des entiers et où $b$ n'est pas divisible par 5.

Si $k = 1$, alors $w = r$ ou $w = r^{-1}$ et on voit que $w(1,0,0) = (\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, 0)$ et donc $w \neq 1$.

Procédons par récurrence : supposons le résultat vérifié pour toutes les rotations $v$ représentées par des mots réduits, non vides, se terminant par $r$ ou $r^{-1}$ et de longueur inférieure à $k$.

Soit alors $w$ une rotation représentée par un mot du même genre mais de longueur $k+1$. Alors $w$ est de la forme $r^{\pm 1}w'$ ou $s^{\pm 1}w'$ où $w'$ est représentée par un mot réduit de longueur $k$ et se terminant par $r$ ou $r^{-1}$. Par hypothèse, $w'(1,0,0)$ est de la forme $(\frac{a'}{5^k}, \frac{b'}{5^k}, \frac{c'}{5^k})$ où $a', b', c'$ sont des entiers et où $b'$ n'est pas divisible par 5. Alors, en écrivant $w(1,0,0) = r^{\pm 1}w'(1,0,0)$ de façon matricielle, on a :

$$w(1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \mp\frac{4}{5} & 0 \\ \pm\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a'}{5^k} \\ \frac{b'}{5^k} \\ \frac{c'}{5^k} \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{k+1}} \begin{pmatrix} 3a' \mp 4b' \\ \pm 4a' + 3b' \\ 5c' \end{pmatrix}$$

de sorte que $w(1,0,0) = \frac{1}{5^{k+1}}(a,b,c)$ avec $a = 3a' \mp 4b'$, $b = \pm 4a' + 3b'$ et $c = 5c'$.
Si $w = s^{\pm 1}w'$, un calcul analogue donne $a = 5a'$, $b = 3b' \mp 4c'$ et $c = 3c' \pm 4b'$.

On voit facilement que $a, b$ et $c$ sont des entiers. Il ne reste plus qu'à démontrer que $b$ n'est pas divisible par 5 sachant que $b'$ ne l'est pas non plus. Pour cela, remarquons qu'on peut écrire $w' = r^{\pm 1}w''$ ou $w' = s^{\pm 1}w''$, où $w''$ est représentée par un mot de longueur $k-1$, éventuellement vide, mais se terminant par $r$ ou par $r^{-1}$ s'il ne l'est pas. On a donc quatre cas à étudier :

$$\begin{array}{ll} w = r^{\pm 1}s^{\pm 1}w'' & \qquad w = s^{\pm 1}r^{\pm 1}w'' \\ w = r^{\pm 1}r^{\pm 1}w'' & \qquad w = s^{\pm 1}s^{\pm 1}w'' \end{array}$$

Dans les deux premiers cas, les exposants $\pm 1$ affectés à $r$ et à $s$ sont indépendants. Par contre, dans les deux derniers cas, on peut les supposer égaux, soit à $+1$ soit à $-1$, car le mot complet réprésentant $w$ est réduit.

Ces quatre cas deviennent donc :

$$w = r^\epsilon s^\eta w'' \qquad w = s^\epsilon r^\eta w''$$
$$w = r^\epsilon r^\epsilon w'' \qquad w = s^\epsilon s^\epsilon w''$$

où $\epsilon \in \{+1, -1\}$ et $\eta \in \{+1, -1\}$. Dans ce cas, les formules trouvées plus haut pour $a, b$ et $c$ peuvent être réécrites :

$$\begin{array}{cccc} a = 3a' - 4\epsilon b' & b = 3b' + 4\epsilon a' & c = 5c' & \text{si } w = r^\epsilon w' \\ a = 5a' & b = 3b' - 4\epsilon c' & c = 3c' + 4\epsilon b' & \text{si } w = s^\epsilon w' \end{array}$$

Si le mot qui représente $w''$ n'est pas vide, on peut alors lui appliquer l'hypothèse de récurrence, et dans ce cas $w''(1, 0, 0) = (\frac{a''}{5^{k-1}}, \frac{b''}{5^{k-1}}, \frac{c''}{5^{k-1}})$. S'il est vide, $w'' = 1$ et on a alors simplement $a'' = 1$, $b'' = c'' = 0$.

Dans les deux cas, $a'', b''$ et $c''$ sont des entiers, mais on ne peut généralement pas dire que $b''$ n'est pas divisible par 5. Toutefois, nous avons :

$$\begin{array}{cccc} a' = 3a'' - 4\eta b'' & b' = 3b'' + 4\eta a'' & c' = 5c'' & \text{si } w' = r^\eta w'' \\ a' = 5a'' & b' = 3b'' - 4\eta c'' & c' = 3c'' + 4\eta b'' & \text{si } w' = s^\eta w'' \end{array}$$

Supposons d'abord que $w = r^\epsilon s^\eta w''$. Comme $a' = 5a''$ et $b = 3b' + 4\epsilon a' = 3b' + 20\epsilon a''$, $b$ ne peut pas être un multiple de 5 puisque $b'$ n'en est pas un.

Supposons maintenant que $w = s^\epsilon r^\eta w''$. Alors $c' = 5c''$ et $b = 3b' - 4\epsilon c' = 3b' - 20\epsilon c''$ et donc $b$ ne peut pas être un multiple de 5 car $b'$ n'en est pas un.

Dans le cas où $w = r^\epsilon r^\epsilon w''$, on a $b = 3b' + 4\epsilon a'$ et $a' = 3a'' - 4\epsilon b''$, d'où :

$$b = 3b' + 4\epsilon(3a'' - 4\epsilon b'') = 3b' + 12\epsilon a'' - 16b'' = 3b' + 9b'' + 12\epsilon a'' - 25b'' = 6b' - 25b''$$

et alors b n'est pas divisible par 5 puisque $b'$ ne l'est pas.

Enfin, si $w = s^\epsilon s^\epsilon w''$, on a $b = 3b' - 4\epsilon c'$ et $c' = 3c'' + 4\epsilon b''$, d'où :

$$b = 3b' - 4\epsilon(3c'' + 4\epsilon b'') = 3b' - 12\epsilon c'' - 16b'' = 3b' + 9b'' - 12\epsilon c'' - 25b'' = 6b' - 25b''$$

et on a la même conclusion.

On a donc démontré que si $w$ s'écrit comme un mot non vide, réduit et se terminant par $r$ ou $r^{-1}$, alors $w \neq 1$.

Si au contraire $w$ s'écrit comme un mot réduit, non vide, terminé par $s$ ou $s^{-1}$, posons alors $w' = rwr^{-1}$ si $w$ commence par $r^{-1}$ et $w' = r^{-1}wr$ si $w$ commence par $r$. Par construction, $w'$ est représenté par un mot réduit, non vide et se terminant par $r$ ou $r^{-1}$. D'après le raisonnement précédent, on a $w' \neq 1$ et il en résulte facilement que $w \neq 1$. □

Ainsi, les rotations $r$ et $s$ définies plus tôt engendrent un groupe libre $L$ de rang 2, qui est dédoublable d'après le théorème 2.3.6. On arrive donc enfin au paradoxe de la sphère.

**Paradoxe de Hausdorff (AC).** *Dans la sphère unité $S_2$ de l'espace, il existe un ensemble dénombrable $D$ tel que $S_2 \setminus D$ soit dédoublable sous l'action du groupe des rotations $SO_3$ ou sous celle du groupe des isométries.*

*Démonstration.* Il est évident que le groupe $L$ défini plus haut opère dans $S_2$ : si $w \in L$ et si $x \in S_2$, alors $w(x) \in S_2$. On voit également assez facilement que $L$ est dénombrable. En effet, tout élément $w$ de $L$ est défini par un mot par rapport à quatre lettres, et l'ensemble de tous ces mots est dénombrable.

Remarquons maintenant que tout élément $w$ de $L$ différent de 1 a deux points fixes dans $S_2$ : les points d'intersection de son axe avec $S_2$. Si on désigne alors par $D$ l'ensemble des points d'intersection de $S_2$ avec les axes de toutes les rotations $w \in L$, on obtient un ensemble dénombrable. Il s'agit maintenant de montrer que $L$ opère librement dans $S_2 \setminus D$.

Pour cela, montrons que $L$ opère dans $S_2 \setminus D$, c'est-à-dire que si $w \in L$ et si $x \in S_2 \setminus D$, alors $w(x) \in S_2 \setminus D$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $w(x) \in D$. Par définition de $D$, $w(x)$ serait alors sur l'axe d'une rotation $v \in L$ autre que 1. On aurait alors $v(w(x)) = w(x)$, c'est-à-dire $(w^{-1}vw)(x) = x$. Comme $w^{-1}vw \in L$, cette relation, qui exprime que $x$ est un point fixe de $w^{-1}vw$, n'est possible que si $w^{-1}vw = 1$ (sinon, $x$ serait un élément de $D$). On a donc $vw = w$ d'où $v = 1$, ce qui est absurde. Cela montré, il est évident que $L$ opère librement sur $S_2 \setminus D$.

D'après le théorème 2.3.10, l'ensemble $S_2 \setminus D$ est dédoublable sous l'action de $L$. Comme $L$ opère aussi dans $\mathbb{R}^3$, on peut dire aussi que $S_2 \setminus D$ est dédoublable dans $\mathbb{R}^3$ sous l'action de groupes plus vastes comme $SO_3$ ou le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$. □

SD

Ainsi on peut donc partager $S_2 \setminus D$ en deux parties complémentaires $A$ et $B$ telles que chacune d'elles soit équidécomposable à $S_2 \setminus D$. Tout le génie de Banach et Tarski a été d'éliminer l'ensemble $D$. Voyons comment.

## 3.2 Le paradoxe de Banach-Tarski, version faible

**3.2.1 Théorème. (AC)** *La sphère toute entière est dédoublable sous l'action du groupe $SO_3$ des* [illegible]

9.hC28(t24 21.9552 Tf 210.21 Td572[(D)]TJ/F15 11.9752 Tf 10.458 Tf87[(S)]TJ/F27-10.95

Posons alors $\overline{D} = \bigcup_{i=0}^{\infty} r^i(D)$. Comme $D$ ne rencontre aucun des ensembles $r^n(D)$ pour $n > 0$, $D$ ne rencontre pas leur réunion. Mais cette réunion est égale à $r(\overline{D})$, et on a donc :

$$S_2 = (S_2 \setminus \overline{D}) \cup D \cup r(\overline{D}),$$

où les trois ensembles sont deux à deux disjoints. D'où :

$$S_2 \setminus D = (S_2 \setminus \overline{D}) \cup r(\overline{D}).$$

Comme $r(\overline{D})$ est congruent à $\overline{D}$, on voit que $(S_2 \setminus \overline{D}) \cup r(\overline{D})$ est équidécomposable à $(S_2 \setminus \overline{D}) \cup \overline{D}$, c'est-à-dire que $S_2 \setminus D$ est équidécomposable à $S_2$.

$S_2 \setminus D$ étant dédoublable, on a d'après le théorème 2.1.3 que $S_2$ est dédoublable. $\square$

On approche du but. Encore un petit résultat intermédiaire :

**3.2.2 Théorème. (AC)** *La boule unité de $\mathbb{R}^3$ privée de l'origine est un ensemble dédoublable sous l'action du groupe $SO_3$ des rotations de l'espace.*

*Démonstration.* Appelons $E$ cet ensemble.

A tout point $x$ de la sphère $S_2$, associons le segment $]0, x]$, privé de $O$, joignant $O$ à $x$, et à tout ensemble $A$ inclus dans $S_2$, associons l'ensemble $A'$ égal à la réunion des segments $]0, x]$ lorsque $x$ parcourt $A$.

On vérifie facilement que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A'_i$, que $A' \cap B' = \emptyset$ si $A \cap B = \emptyset$ et que pour toute rotation $g \in SO_3$, on a $B' = g(A')$ si $B = g(A)$.

On en déduit facilement que si $A$ et $B$ sont des ensembles équidécomposables dans $S_2$, $A'$ et $B'$ sont des ensembles équidécomposables dans $E$ pour $SO_3$.

En conséquence, si $A$ est une partie dédoublable de $S_2$, $A'$ est une partie dédoublable de $E$.

En particulier, puisque $S_2$ est dédoublable, $S'_2$ est dédoublable. Il suffit alors de voir que $S'_2 = E$ pour achever la démonstration. $\square$

On en déduit finalement la version faible du paradoxe de Banach-Tarski :

**Paradoxe de Banach-Tarski (Version faible - AC).** *La boule unité $B$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est dédoublable sous l'action du groupe $G_3$ des isométries de l'espace.*

*Démonstration.* On sait déjà que $E = B \setminus \{O\}$ est dédoublable pour $SO_3$, donc a fortiori pour $G_3$. Il reste donc à montrer que $E$ et $B$ sont des ensembles équidécomposables sous l'action de $G_3$.

Considérons un axe $d$ quelconque passant par $O$, une rotation $r$ d'axe $d$ et d'ordre infini (d'angle $2\pi\alpha$, où $\alpha$ est irrationnel) et un point $a \neq O$ de $B$ situé dans le plan perpendiculaire en $O$ à la droite $d$. Alors les points $a, r(a), r^2(a), \ldots$ sont tous distincts et forment un ensemble $A$ inclus dans $E$ tel que $r(A) = A \setminus \{a\}$. Partageons la boule unité en trois ensembles deux à deux disjoints : $E \setminus A$, $A$ et $\{O\}$. Remplaçons alors $A$ par $r(A)$ et $\{O\}$ par $\{a\}$. On obtient ainsi trois ensembles deux à deux disjoints, congruents aux trois ensembles initiaux et dont la réunion est $E$. Cela prouve que $B$ est équidécomposable à $E$. Le théorème 2.1.3 permet alors de conclure. □

**3.2.3 Corollaire. (AC)** *Il est possible de découper la boule unité en un nombre fini de morceaux et de réassembler ces morceaux sans les déformer pour obtenir $n$ boules disjointes de rayon 1.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 2.1.5. □

**3.2.4 Corollaire. (AC)** *Il est possible de découper une boule fermée quelconque en un nombre fini de morceaux, puis de réassembler ces morceaux sans les déformer pour obtenir soit deux boules fermées disjointes de même rayon, soit davantage.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer une homothétie à la boule unité et aux différents morceaux permettant le dédoublement, puis de translater. □

## 3.3 Le paradoxe de Banach-Tarski, version forte

Nous avons démontré la version du paradoxe de Banach-Tarski la plus courante. Il faut encore quelques lemmes pour aboutir à sa version forte, mais celle que nous avons démontrée est déjà très parlante. Continuons toutefois sur notre lancée.

**3.3.1 Théorème.** *Soit $G$ un groupe opérant dans un ensemble $X$ et soient $A$ et $B$ deux parties de $X$. Si $A \sim B$, il existe une bijection $g : A \longrightarrow B$ telle que $C \sim g(C)$ pour tout sous-ensemble $C$ de $A$.*

*Démonstration.* Puisque $A \sim B$, on a :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ , \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad et \quad B_i = g_i A_i,$$

où les réunions $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ sont disjointes et où les $g_i$ sont des éléments de $G$.

On a vu dans la démonstration du théorème 2.1.3 que chaque élément $g_i$ définit une bijection $\bar{g}_i : A_i \longrightarrow B_i$. On voit alors qu'il existe une bijection $g : A \longrightarrow B$ (qui coïncide avec $\bar{g}_i$ pour chaque $A_i$).

Soit $C$ une partie de $A$. Alors $g(C)$ est une partie de $B$ et on a :

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} (C \cap A_i) \quad \text{et} \quad g(C) = \bigcup_{i=1}^{n} (g(C) \cap B_i),$$

où les ensembles $C \cap A_i$ (resp. $g(C) \cap B_i$) sont deux à deux disjoints.

Enfin, puisque $g_i(C \cap A_i) = \bar{g}_i(C \cap A_i) = g(C \cap A_i) = g(C) \cap g(A_i) = g(C) \cap B_i$, on voit bien que $g(C) \sim C$. $\square$

**3.3.2 Théorème.** *Soit $\equiv$ une relation d'équivalence dans l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque $X$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Si $A \equiv B$, il existe une bijection $g : A \longrightarrow B$ telle que $C \equiv g(C)$ pour tout sous-ensemble $C$ de $A$.*
2. *Si $A_1 \equiv B_1$ et $A_2 \equiv B_2$, et si $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, alors $A_1 \cup A_2 \equiv B_1 \cup B_2$.*

*Dans ce cas, si $A$ est équivalent à une partie de $B$ et si $B$ est équivalent à une partie de $A$, alors $A$ est équivalent à $B$ (modulo $\equiv$).*

*Démonstration.* Soient $A$ et $B$ des parties de $X$ et supposons $A \equiv B_1$ avec $B_1 \subset B$ et $B \equiv A_1$ avec $A_1 \subset A$.

D'après la condition *1*, il existe une bijection $g : A \longrightarrow B_1$ telle que $A' \equiv g(A')$ pour toute partie $A'$ de $A$, et une bijection $h : A_1 \longrightarrow B$ telle que $A'' \equiv h(A'')$ pour toute partie $A''$ de $A_1$.

Considérons alors l'injection $g : A \longrightarrow B$, la bijection $h^{-1} : B \longrightarrow A_1$ et posons :

$$C_0 = A \setminus A_1 \quad , \quad C_{n+1} = h^{-1}(g(C_n)) \quad , \quad C = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i.$$

Par construction, $C_0$ et $A_1$ sont deux parties complémentaires de $A$, d'où $A \setminus C_0 = A_1$.

Puisque $C_0 \subset C$ et puisque $C$ est une partie de $A$, on a $A \setminus C \subset A \setminus C_0 = A_1$. Par conséquent, $h(A \setminus C)$ est bien défini.

Il s'agit maintenant de montrer que $h(A \setminus C)$ et $g(C)$ sont complémentaires dans $B$. Pour cela, nous allons montrer, puisque ce sont deux parties de $B$, que pour $y \in B$ :

$$y \in h(A \setminus C) \Leftrightarrow y \notin g(C).$$

Supposons que $y \in h(A \setminus C)$. Alors il existe $x \in A \setminus C$ tel que $y = h(x)$. Comme $x$ n'appartient pas à $C$, $x$ n'appartient à aucun ensemble $C_i$ pour $i \in \mathbb{N}$. On en déduit que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $h(x) \notin h(C_{i+1}) = g(C_i)$, et par conséquent $y$ n'appartient à aucun de ces ensembles. A fortiori, $y$ n'appartient pas non plus à leur réunion, qui vaut $g(C)$.

Supposons maintenant que $y \notin g(C)$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $y \notin g(C_i)$. Mais $y \in B$ et $h : A_1 \longrightarrow B$ est une bijection, donc il existe $x \in A_1$ tel que $h(x) = y$. Puisque $x \in A_1$, $x \notin C_0$. On voit alors que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $h(x) \notin g(C_i)$ et par conséquent $x \notin C$, ce qui peut s'écrire $x \in A \setminus C$. Finalement, cela prouve que $y \in h(A \setminus C)$.

On a donc montré que $g(C)$ et $h(A \setminus C)$ sont complémentaires dans $B$.

Comme $A \setminus C \subset A_1$, on a $A \setminus C \equiv h(A \setminus C) = B \setminus g(C)$, et comme $C \subset A$, $C \equiv g(C)$.

Enfin, puisqu'on a $C \cap (A \setminus C) = \emptyset$ et $g(C) \cap (B \setminus g(C)) = \emptyset$, on déduit de la condition *2* que :

$$C \cup (A \setminus C) \equiv g(C) \cup (B \setminus g(C)),$$

c'est-à-dire $A \equiv B$. □

Ce théorème est évidemment très général. Il a pour corollaire le célèbre théorème de Cantor[1]-Schröder[2]-Bernstein[3], fondamental pour la théorie des cardinaux.

Etant donné que la relation d'équidécomposabilité vérifie les deux conditions de ce théorème (cf. théorèmes 1.2.5 et 3.3.1), nous allons en déduire un autre corollaire, originalement établi par Banach en 1924 :

---

[1] Georg Cantor (1845-1918) - Mathématicien allemand.
[2] Ernst Schröder (1841-1902) - Mathématicien allemand.
[3] Felix Bernstein (1878-1956) - Mathématicien allemand (oui, lui aussi...).

**3.3.3 Corollaire.** *Soit $G$ un groupe opérant dans un ensemble $X$ et soient $A$ et $B$ deux parties de $X$. Si $A$ est équidécomposable à une partie de $B$ et si $B$ est équidécomposable à une partie de $A$, alors $A$ et $B$ sont équidécomposables entre eux.*

En appliquant ce corollaire aux boules fermées, on obtient le dernier lemme :

**3.3.4 Théorème. (AC)** *Deux boules fermées de $\mathbb{R}^3$, de rayons quelconques, sont toujours équidécomposables.*

*Démonstration.* Soient $B$ et $B'$ deux boules fermées de $\mathbb{R}^3$ de rayons respectifs $r$ et $R$.

Si $r = R$, le résultat est évident (c'est le corollaire 3.2.4). On peut donc supposer $r < R$.

$B$ est de façon évidente équidécomposable à une partie de $B'$. Montrons alors que $B'$ est équidécomposable à une partie de $B$.

Soit $(B_1, ..., B_n)$ un recouvrement de $B'$ par des boules fermées de rayon $r$.
On a alors $B' \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Considérons alors $B'_1, ..., B'_n$ $n$ boules fermées de rayon $r$, deux à deux disjointes et de réunion $B''$. D'après le corollaire 3.2.4, $B''$ est équidécomposable à $B$.

On a évidemment :

$$B' = \bigcup_{i=1}^{n} \left( B' \cap \left( B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k \right) \right),$$

où les $(B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k)$ sont deux à deux disjoints et chacun équidécomposable à une partie de $B'_i$.

D'après le théorème 1.2.5, $B'$ est équidécomposable à une partie de $B''$. Mais comme $B''$ est lui-même équidécomposable à $B$, on voit que $B'$ est équidécomposable à une partie de $B$ (cf. théorème 3.3.1).

Le corollaire 3.3.3 permet alors de conclure. □

Enfin nous y voilà. Après un si long parcours, et tant de lemmes barbares, nous arrivons au graal sacré de la théorie de l'équidécomposabilité, la version forte du théorème de Banach-Tarski :

**Paradoxe de Banach-Tarski (Version forte - AC).** *Deux ensembles de $\mathbb{R}^3$ bornés et d'intérieurs non vides sont équidécomposables.*

*Démonstration.* Soient $E$ et $F$ deux ensembles bornés et d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}^3$.

Soient alors $B_1, B_2, C_1$ et $C_2$ des boules fermées telles que $B_1 \subset E \subset B_2$ et $C_1 \subset F \subset C_2$.

Puisque (cf théorème 3.3.4) $B_2$ et $C_1$ sont équidécomposables, $E$ est équidécomposable à une partie de $C_1$, donc à une partie de $F$. On montre par un raisonnement analogue que $F$ est équidécomposable à une partie de $E$.

Le corollaire 3.3.3 permet alors de conclure, et par la même occasion, de mettre fin (temporairement, rassurez-vous...) à nos souffrances. $\square$

# Deuxième partie

# Compléments et conséquences

Chapitre 4

# Compléments

Ce chapitre est volontairement très court. En effet, tout ce dont nous allons parler tourne autour du paradoxe de Banach-Tarski mais sans apporter d'élément absolument essentiel à sa compréhension. Pour cette raison, nous ommetrons d'entrer trop dans les détails, et nous sauterons les démonstrations, longues et fastidieuses, car d'une part le mémoire est déjà bien assez long, et d'autre part il nous faudrait introduire un grand nombre de nouvelles notions pour les comprendre, notamment des notions de groupes topologiques.

## 4.1 Compléments

Il convient de faire quelques remarques sur la démonstration donnée dans ce mémoire. Tout d'abord, concernant l'existence des éléments indépendants dans le groupe $SO_3$ (théorème 3.1.1), Stan Wagon nous donne dans son livre deux conditions suffisantes sur les rotations de $SO_3$ pour que celles-ci soient indépendantes.

**4.1.1 Théorème.** *Soient $\phi$ et $\rho$ deux rotations de $S^2$ de même angle $\theta$. Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*
*(i) Les axes des deux rotations $\phi$ et $\rho$ sont perpendiculaires et $\cos(\theta)$ est un rationnel différent de $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$.*
*(ii) Les axes des deux rotations $\phi$ et $\rho$ sont distincts et le cosinus de l'angle formé par les axes est transcendant.*
*Alors $\phi$ et $\rho$ sont indépendantes.*

Bien entendu la démonstration dans un cas particulier est déjà suffisamment longue, donc nous passerons sur la démonstration de ce théorème. Il est curieux par contre de remarquer que si l'on choisissait deux rotations de $S^2$, de même angle et d'axes distincts pris “au hasard”, on aurait de très fortes chances de tomber sur deux rotations indépendantes, étant donné que les nombres transcendants sont en quantité indénombrable dans $[0, 1]$.

Un autre développement intéressant concerne l'optimisation du nombre de morceaux utilisés dans l'équidécomposition. On arrive à des résultats assez intéressants, que nous allons énumérer tels quels, sans démonstration :

**4.1.2 Théorème. (AC)** *Si un groupe $G$ libre de rang 2 opère librement sur un ensemble $X$, alors $X$ est $G$-paradoxal, et la décomposition utilise quatre morceaux.*

**4.1.3 Corollaire. (AC)** *La sphère unité $S_2$ est $SO_3$-paradoxale par l'utilisation de quatre morceaux.*

**4.1.4 Théorème. (AC)** *Une boule de $\mathbb{R}^3$ n'admet aucune décomposition paradoxale utilisant moins de cinq morceaux, et pour toute boule de $\mathbb{R}^3$, il existe toujours une décomposition paradoxale utilisant cinq morceaux.*

**4.1.5 Théorème. (AC)** *Un groupe $G$ est paradoxal par l'utilisation de quatre morceaux si et seulement si $G$ possède un sous-groupe libre de rang 2.*

## 4.2 Le paradoxe de Dougherty-Foreman

Ceux qui prétextaient que le paradoxe de Banach-Tarski était bien trop dérangeant à leurs yeux pour accepter l'axiome du choix vont faire les gros yeux ! En effet, même en rejetant l'axiome du choix, ils ne sont plus désormais à l'abri des paradoxes, depuis une découverte de Dougherty [1] et Foreman [2] :

**Paradoxe de Dougherty-Foreman.** *Si $A$ et $B$ sont des ensembles ouverts bornés non vides de $\mathbb{R}^m$ (avec $m \geq 3$), alors il existe des ensembles ouverts $A_1, ..., A_n$ deux à deux disjoints, contenus dans $A$, et des ensembles ouverts $B_1, ..., B_n$ deux à deux disjoints, contenus dans $B$, se déduisant les uns des autres par isométrie ($A_1$ avec $B_1$, $A_2$ avec $B_2$, etc) tels que $A$ et $B$ soient contenus respectivement dans l'adhérence de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et dans l'adhérence de $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$.*

[1] Randall Dougherty - Mathématicien américain.
[2] Matthew Foreman (né en 1957) - Mathématicien américain.

Concrètement, cela signifie qu'il est possible de déterminer à l'intérieur d'une boule aussi grosse que VV Cephei A (une étoile supergéante rouge près de 1500 fois plus grosse que le soleil !) des ensembles ouverts deux à deux disjoints, en nombre fini, ne laissant dans cette boule aucun trou de rayon strictement positif, puis de réarranger ces morceaux par simple déplacement, en les laissant disjoints, de manière à ce qu'ils rentrent dans une autre boule de la taille d'un grain de sable... Et non seulement ces ensembles sont définis sans l'axiome du choix, mais en plus ils sont boréliens (car ouverts) et donc mesurables !

Ce résultat date de 1992, c'est-à-dire plusieurs années après la publication de mes principales références sur le paradoxe de Banach-Tarski, c'est pourquoi je n'ai pas beaucoup plus d'information à vous donner sur ce résultat qui non seulement est tout aussi impressionant que notre sujet, mais qui de plus porte un coup majeur aux détracteurs de l'axiome du choix. Qui a tort, qui a raison ? Je crois qu'on va patienter encore longtemps avant de se mettre d'accord !

## 4.3 Le rôle de l'axiome du choix

Nous l'avons déjà mentionné : le paradoxe de Banach-Tarski est indémontrable sans l'axiome du choix, dans le sens qu'avec les axiomes de ZF uniquement, on ne peut pas aboutir au résultat.

Si nous appelons T une *théorie* (*i.e.* un ensemble de *phrases*, ou de *démonstrations*, mais je ne tiens pas à définir tout cela) comme par exemple ZF, alors on notera **Con**(T) l'assertion selon laquelle la théorie T est *consistante*, c'est-à-dire ne mène à aucune contradiction.

Nous supposerons **Con**(ZF) dans toute la suite.

Ce que Gödel a démontré en 1938, c'est que **Con**(ZF) est équivalent à **Con**(ZF + AC), où AC représente l'axiome du choix, donc que l'axiome du choix est *indépendant* de ZF.

Si on note LM l'assertion selon laquelle toutes les parties de $\mathbb{R}$ sont Lebesgue-mesurables, alors on voit immédiatement que LM contredit AC, et que ZF + LM ne permet pas de démontrer le paradoxe de Banach-Tarski. En fait, on a **Con**(ZF + LM), ce qui permet d'affirmer **Con**(ZF + "Le paradoxe de Banach-Tarski est faux"), d'où le résultat : le théorème de Banach-Tarski n'est pas un théorème de ZF.

Tous ces résultats paraissent simples énoncés ainsi, mais la signification profonde de ces théorèmes, les démonstrations et surtout la théorie qu'il y a derrière sont très compliqués. Pour vraiment en savoir plus sur le rôle de l'axiome du choix dans le paradoxe de Banach-Tarski, je vous invite à vous armer de patience et à consulter le chapitre XIII de [2].

Chapitre 5

# Conséquences du théorème de Banach-Tarski

## 5.1 Mesures exhaustives

L'extension de la notion d'aire à des ensembles du plan autres que des polygones a posé beaucoup de problèmes aux mathématiciens. On doit cependant à Jordan[1] la notion d'ensemble *quarrable* et à Lebesgue celle d'ensemble *mesurable*. Pourtant, malgré leurs efforts, il existe dans le plan des ensembles qui ne sont ni quarrables, ni mesurables au sens de Lebesgue.

**5.1.1 Définition.** Dans toute la suite, nous appellerons *mesure* toute application de l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ dans $[0, \infty]$ qui satisfait à l'une des conditions suivantes :
(CA) Si $A_1, ..., A_n, ...$ est une suite infinie de parties de $X$ deux à deux disjointes, on a :

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(SA) Si $A_1, ..., A_n$ est une suite finie de parties de $X$ deux à deux disjointes, on a :

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Dans le premier cas, on dit que la mesure est *complètement additive*, et dans le second qu'elle est *simplement additive*.

[1] Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) - Mathématicien français.

Bien sûr, habituellement on parle de mesure définie sur une tribu, mais exceptionnellement nous ne considérerons ici que des mesures définies sur l'ensemble des parties de $X$. Ces mesures particulières sont dites *exhaustives*.

**5.1.2 Théorème.** *La condition (CA) entraine la condition (SA).*

*Démonstration.* Le cas où $\mu(\emptyset) = +\infty$ est sans intérêt, car on a alors pour toute partie $A$ de $X$ :

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup ...) = \mu(A) + \mu(\emptyset) + ... = +\infty.$$

Supposons alors que $\mu(\emptyset) = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Appliquons la condition (CA) à la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $A_n = \emptyset$ pour tout $n$. On obtient alors que :

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

avec $a_n = a$ pour tout $n$.

Or ceci n'est possible que pour $a = 0$. Il vient alors que $\mu(\emptyset) = 0$.

Finalement, si $(A_1, ..., A_p)$ est une suite finie de parties de $X$ deux à deux disjointes, il suffit de poser $A_i = \emptyset$ pour tout $i > p$, et d'appliquer (CA) à la suite ainsi obtenue pour obtenir le résultat. $\square$

Notons aussi que pour vérifier (SA), il suffit simplement de vérifier la condition pour deux parties de $X$ disjointes, puis d'effectuer une simple récurrence.

La notion d'additivité complète a été introduite par Borel alors qu'il étudiait les règles de passage à la limite sous le signe somme du calcul intégral. Ce n'est pourtant pas aux mesures exhaustives qu'il s'intéressait, mais uniquement aux mesures définies sur certains sous-ensembles qu'on appelle boréliens. Plus tard, Lebesgue a étendu la mesure de Borel en définissant ce qu'on appelle les ensembles mesurables. Mais ni la mesure de Borel, ni celle de Lebesgue ne sont exhaustives, et la question d'en trouver une sur $\mathbb{R}^n$ était posée.

Vérifions tout d'abord quelques propriétés élémentaires de ces mesures exhaustives.

Soit $\mu$ une mesure exhaustive sur un ensemble $X$. Si le contraire n'est pas précisé, nous ne la supposerons que simplement additive.

**5.1.3 Théorème.** *Si $A$ et $B$ sont deux parties de $X$ telles que $A \subset B$, alors on a $\mu(A) \leq \mu(B)$. En particulier, si $\mu(B)$ est fini (resp. nul) alors $\mu(A)$ est fini (resp. nul).*

*Démonstration.* C'est évident, puisque $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ où $\mu(B \setminus A) \geq 0$. □

**5.1.4 Théorème.** *Soit $A$ et $B$ deux parties de $X$. Si $\mu(A)$ et $\mu(B)$ sont finis (resp. nuls), alors $\mu(A \cup B)$ est fini (resp. nul). Ce résultat se généralise à un nombre fini quelconque d'ensembles.*

*Démonstration.* C'est encore évident puisque $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ □

Le nombre $\mu(A)$ est souvent appelé la *mesure* de $A$ par rapport à $\mu$.

**5.1.5 Définition.** Si $G$ est un groupe opérant sur $X$, on dit que $\mu$ est une mesure *invariante* sous l'action de $G$, ou que $G$ *conserve* la mesure $\mu$, si quel que soit l'ensemble $A \subset X$ et quel que soit l'opérateur $g \in G$, on a $\mu(A) = \mu(gA)$.

En d'autres termes, cela signifie que si $\mu$ est une mesure invariante sous l'action de $G$, alors deux ensembles congruents sous l'action de $G$ ont toujours la même mesure par rapport à $\mu$.

On déduit immédiatement de tout cela :

**5.1.6 Théorème.** *Si $G$ conserve la mesure $\mu$ sur $X$, deux ensembles équidécomposables sous l'action de $G$ ont nécessairement la même mesure.*

Il apparait alors quelques contraintes relatives aux ensembles dédoublables :

**5.1.7 Théorème.** *Si $\mu$ est une mesure exhaustive dans un ensemble $X$, invariante sous l'action d'un groupe $G$, on a nécessairement $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = +\infty$ pour tout ensemble dédoublable $E$ dans $X$ sous l'action de $G$.*

*Démonstration.* Si $E$ est dédoublable, il existe deux parties $A$ et $B$ complémentaires dans $E$ qui sont, séparément, équidécomposables à $E$.

D'après le théorème 5.1.6, on a donc $\mu(E) = \mu(A) = \mu(B)$.

Mais comme $\mu(E) = \mu(A) + \mu(B)$, on a finalement $\mu(E) + \mu(E) = \mu(E)$, ce qui n'est possible que si $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = +\infty$. □

## 5.2 Le cas de l'espace

Le paradoxe de Banach-Tarski qui nous a occupé jusqu'à présent permet de résoudre rapidement le cas de l'espace :

**5.2.1 Théorème.** *Il n'existe pas dans l'espace numérique $\mathbb{R}^3$ de mesure $\mu$ qui soit à la fois exhaustive, invariante par isométrie et pour laquelle la mesure du cube unité soit finie non nulle.*

*Démonstration.* En effet, comme le cube unité est équidécomposable à la sphère unité, il est dédoublable (d'après le théorème 3.2.1). En conséquence, on a d'après le théorème 5.1.7 que pour toute mesure exhaustive et invariante par isométrie $\mu$, la mesure $\mu([0,1]^3)$ du cube unité est soit nulle soit infinie. □

Ce résultat s'étend bien sûr à toutes les dimensions supérieures à 3.

Reste à se poser la question en ce qui concerne les dimensions strictement inférieures. Mais avant cela, nous allons montrer que le théorème ci-dessus avait en fait déjà été découvert par Hausdorff. Il convient alors de démontrer maintenant la version originalement découverte du paradoxe de la sphère par Hausdorff en 1914 (l'énoncé est fidèle à l'original, en revanche la démonstration n'est pas de lui) :

**Paradoxe de Hausdorff (Version originale - AC).** *On peut répartir les points d'une sphère $S$ de l'espace à trois dimensions en quatre sous-ensembles $A, B, C, D$ deux à deux disjoints de telle sorte que $D$ soit dénombrable et que l'on ait $r(A) = B \cup C$, $s(A) = B$ et $t(A) = C$ où $r, s, t$ sont des rotations autour du centre de $S$.*

*Démonstration.* Considérons les deux rotations vectorielles $u$ et $v$ de $SO_3$ représentées par les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Si $G$ est le groupe engendré par $u$ et $v$, alors tout élément $r$ de $G \setminus \{id, u\}$ se met sous la forme $r = u^{\epsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} u ... u v^{n_k} u^{\epsilon_2}$ avec $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ dans $\{0, 1\}$, les $n_i$ dans $\{1, 2\}$ et $k \geq 1$.

La matrice $R$ de $r$ s'écrit alors :

$$R = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\sqrt{3} \\ a_2 & b_2 & c_2\sqrt{3} \\ a_3\sqrt{3} & b_3\sqrt{3} & c_3 \end{pmatrix}$$

où les $a_i$, $b_i$ et $c_i$ sont des entiers relatifs, avec $a_1, b_1, c_1, b_2, b_3$ pairs et $a_2, a_3, c_2, c_3$ impairs. Cette écriture est unique.

On définit alors une partition $(I, J, K)$ de $G$ de la façon suivante :

- Pour tout entier $n$, $(v^2u)^n$ est dans $I$.
- Pour tout entier $n$, $u(v^2u)^n$ est dans $J$.
- Pour tout entier $n$, $vu(v^2u)^n$ est dans $K$.
- Les autres éléments de $G$ qui ne sont pas sous une de ces trois formes sont dans $I, J, K$ respectivement selon que leur décomposition commence à gauche par $u, v, v^2$ respectivement.

On voit tout de suite que l'on a $K = vJ$, $J = uI$ et $I = u(J \cup K)$.

Posons maintenant $D = \{x \in S \mid \exists r \in G \setminus \{id\}, r(x) = x\}$. Alors $D$ est dénombrable car $G$ est dénombrable et tout élément de $G$ différent de l'identité n'admet que deux points fixes sur $S$ (les intersections des axes avec $S$).

De plus, $G$ laisse stable $D$. En effet, si $s \in G$ et $x \in D$, alors il existe $r \in G \setminus \{id\}$ tel que $r(x) = x$, et donc $srs^{-1}$ laisse fixe $s(x)$ et n'est pas l'identité. Par complémentarité, $G$ laisse également stable $S \setminus D$, et les orbites des éléments de $S \setminus D$ sous l'action de $G$ constituent une partition de $S \setminus D$ : ce sont les classes d'équivalence pour la relation $(x \sim y) \Leftrightarrow (\exists r \in G, r(x) = y)$.

En utilisant l'axiome du choix, on peut construire un ensemble $T$ contenant un élément dans chaque orbite, et on pose $A = I(T)$, $B = J(T)$ et $C = K(T)$. D'après les égalités vérifiées entre $I, J$ et $K$, on a les relations $C = v(B)$, $B = v(A)$ et $A = u(B \cup C)$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Cette version du paradoxe de la sphère s'interprète de la façon suivante : à un ensemble dénombrable près, l'ensemble $A$ représente à la fois une moitié et un tiers de la sphère $S$.

Hausdorff avait alors démontré le résultat suivant, qui s'appuie sur le paradoxe de la sphère :

**5.2.2 Théorème.** *Sur la sphère unité $S_2$ de $\mathbb{R}^3$, il n'existe aucune mesure $\mu$ qui soit à la fois exhaustive et invariante par rotation, et pour laquelle la mesure de la sphère toute entière soit finie non nulle.*

*Démonstration.* Commençons par démontrer que si $E$ est une partie dénombrable de $S_2$, alors il existe une rotation $r$ autour d'un axe passant par l'origine telle que $E \cap r(E) = \emptyset$.

Puisque $E$ est dénombrable, il en est de même de $-E$ et de $E \cup (-E)$ et par conséquent $S_2 \setminus (E \cup (-E))$ ne peut être vide (car $S_2$ a la puissance du continu). On peut alors choisir $a \in S_2$ en dehors de $E \cup (-E)$, de sorte que la droite $d$ qui joint l'origine à $a$ ne rencontre $E$ en aucun point.

Il en découle que les rotations d'axe $d$ qui transforment au moins un point de $E$ en un point de $E$ forment un ensemble dénombrable. Comme il existe une infinité non dénombrable de rotations d'axe $d$, il en existe au moins une, que l'on peut appeler $r$, qui n'a pas la propriété précédente, c'est-à-dire pour laquelle $E \cap r(E) = \emptyset$.

Considérons maintenant une mesure $\mu$ sur $S_2$, exhaustive, invariante sous l'action de $SO_3$ et pour laquelle $\mu(S_2)$ est un nombre fini.

On a alors $\mu(E \cup r(E)) = \mu(E) + \mu(r(E)) = 2\mu(E)$, donc $\mu(E) = \frac{\mu(E')}{2}$ où $E' = E \cup r(E)$. Mais $E'$ est dénombrable. En reprenant le raisonnement plus haut, on voit qu'il existe une rotation $r'$ telle que $E' \cap r'(E') = \emptyset$, donc que l'on a $\mu(E') = \frac{\mu(E'')}{2}$ si $E'' = E' \cup r'(E')$, ou encore que $\mu(E) = \frac{\mu(E'')}{4}$.

En fait, on peut définir de proche en proche des ensembles dénombrables $E_n \subset S_2$ tels que $\mu(E) = \frac{\mu(E_n)}{2^n}$. On en déduit que $\mu(E) \leq \frac{\mu(S_2)}{2^n}$, ce qui entraine $\mu(E) = 0$ puisque $\mu(S_2)$ est finie.

Supposons maintenant que l'on prenne pour $E$ l'ensemble dénombrable $D$ dont il est question dans le paradoxe de la sphère. On a donc $\mu(D) = 0$. Comme $S_2 \setminus D$ est dédoublable sous l'action de $SO_3$, il résulte du théorème 5.1.7 que $\mu(S_2 \setminus D) = 0$ ou $\mu(S_2 \setminus D) = +\infty$. Puisqu'on a supposé $\mu(S_2)$ finie, on a $\mu(S_2 \setminus D) = 0$, mais alors comme $\mu(D) = 0$, on en déduit $\mu(S_2) = 0$. □

## 5.3 Les cas du plan et de la droite

Il s'agit maintenant de montrer que s'il n'existe pas de mesure universelle (c'est-à-dire exhaustive, simplement additive, invariante par isométrie et normée sur la boule unité) dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), il en existe dans le plan et sur la droite numérique. Notons toutefois qu'il n'existe pas de mesure universelle qui soit complètement additive dans $\mathbb{R}^n$, et pour le comprendre voyons un peu ce qu'il en est des mesures complètement additives.

**5.3.1 Théorème. (AC)** *Sur le cercle unité $S_1$ de $\mathbb{R}^2$, il n'existe aucune mesure exhaustive $\mu$ qui soit complètement additive, invariante par rotation et pour laquelle $\mu(S_1) = 2\pi$.*

*Démonstration.* Considérons la relation d'équivalence définie sur $S_1$ suivante :

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \widehat{xOy} \text{ est de la forme } 2\pi a \text{ où } a \in \mathbb{Q}.$$

En fait, cela revient à dire qu'il existe une rotation "rationnelle" de centre l'origine qui transforme $x$ en $y$. Ces rotations forment un groupe (c'est pourquoi $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence) et forment un ensemble infini dénombrable qu'on peut ranger en une suite infinie $r_1, r_2, ...$ sans répétition.

Soit alors un ensemble $M$ obtenu en choisissant un et un seul point dans chacune des orbites sous l'action du groupe défini ci-dessus. On vérifie facilement que les ensembles $r_i(M)$ sont deux à deux disjoints et que leur réunion est $S_1$.

Supposons maintenant qu'il existe une mesure $\mu$ ayant les propriétés indiquées dans le théorème. Alors $\mu(M)$ est un nombre défini. Comme $\mu$ est invariante par rotation, on a $\mu(M) = \mu(r_n(M))$ pour tout $n \geq 1$. Par additivité complète, on a donc :

$$\mu(S_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(r_n(M)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(M).$$

Si $\mu(M) = 0$, cela donne $\mu(S_1) = 0$ et si $\mu(M) > 0$, alors $\mu(S_1) = +\infty$, ce qui est absurde. □

Nous ne le démontrons pas, mais on obtient un résultat analogue sur $\mathbb{R}$ :

**5.3.2 Théorème. (AC)** *Sur la droite numérique $\mathbb{R}$, il n'existe aucune mesure exhaustive $\mu$ qui soit invariante par translation, normée sur l'intervalle $[0, 1]$ et qui soit en outre complètement additive.*

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il n'existe sur $\mathbb{R}^n$ aucune mesure exhaustive, invariante par isométrie, normée sur le cube unité et de plus complètement additive. Cela revient à dire qu'il existe dans $\mathbb{R}^n$ des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue.

Laissons maintenant tomber le cas des mesures complètement additives et tentons notre chance avec les mesures simplement additives.

**5.3.3 Théorème. (AC)** *Il existe sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs une mesure $\phi$ exhaustive, invariante par translation et normée (c'est-à-dire pour laquelle la mesure de $\mathbb{Z}$ tout entier vaut 1).*

L'existence d'une telle mesure n'est pas évidente, car pour avoir l'invariance par translation, on doit avoir $\mu(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$, ce qui implique que les parties de $\mathbb{Z}$ qui ont une mesure non nulle sont nécessairement infinies. De plus, s'il est facile de remarquer que $\mu(n\mathbb{Z}) = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on ne voit par contre pas à quoi pourrait être égal le nombre $\mu(\mathbb{N})$.

*Démonstration.* Commençons par prouver qu'il existe pour tout entier $n \geq 1$ une mesure $\phi_n$ exhaustive, normée sur $\mathbb{Z}$ et pour laquelle on a :

$$|\phi_n(A+1) - \phi_n(A)| \leq \frac{1}{n}$$

pour toute partie $A$ de $\mathbb{Z}$.

Cette propriété signifie que $\phi_n$ est "presque" invariante par translation. Pour définir une telle mesure, posons simplement $\phi_n(A) = \frac{1}{n}Card(A \cap \{1, ..., n\})$ pour toute partie $A$ de $\mathbb{Z}$. En gros, on compte le nombre d'éléments de $1, ..., n$ qui sont dans $A$ et on divise par $n$.

On a alors évidemment $\phi_n(\mathbb{Z}) = 1$ et $\phi_n(A \cup B) = \phi_n(A) + \phi_n(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

De plus, il est facile de voir que l'on a $|\phi_n(A+1) - \phi_n(A)| \leq \frac{1}{n}$. En effet, si $A$ ne contient pas $\{n\}$ ni $\{0\}$, alors $\phi_n(A+1) - \phi_n(A) = 0$, mais si $A$ contient $\{n\}$ ou $\{0\}$, alors $\phi_n(A+1) \leq \phi_n(A) - \frac{1}{n}$ et l'inégalité est toujours vérifiée.

Les mesures que l'on vient de définir sont dans l'ensemble $\mathfrak{F}$ des applications de $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$ dans $[0, 1]$. On peut définir sur cet ensemble une topologie particulière, appelée la topologie de la convergence simple, et qui a certaines propriétés :

- Pour toute partie $A$ de $\mathbb{Z}$, l'application de $\mathfrak{F}$ dans $[0, 1]$ :

  $$\phi \mapsto \phi(A)$$

  est continue. Autrement dit, $\phi(A)$ est une fonction continue de $\phi$.
- $\mathfrak{F}$ est un espace compact. C'est un cas particulier du théorème de Tychonoff.

Rappelons alors qu'un espace compact $X$ satisfait à la propriété de Borel-Lebesgue : pour tout recouvrement ouvert de $X$, il existe un sous-recouvrement fini. De façon plus précise, cela veut dire que si l'on a une famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ de $X$ telle que $X = \bigcup_{i \in I} O_i$, alors il existe une partie finie $J$ de $I$ telle que $X = \bigcup_{i \in J} O_i$.

En passant aux complémentaires, on obtient la propriété d'intersection finie : pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ de $X$ telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie finie $J$ de $I$ telle que $\bigcap\limits_{i\in J} F_i = \emptyset$. C'est cette propriété que nous allons exploiter maintenant.

Considérons d'abord l'ensemble $\Phi$ des applications $\phi$ de $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$ dans $[0,1]$ qui vérifient $\phi(\mathbb{Z}) = 1$. Cet ensemble est fermé dans $\mathfrak{F}$ car c'est l'image réciproque de l'ensemble fermé $\{1\}$ par la fonction continue $\phi \mapsto \phi(\mathbb{Z})$.

Si $A$ et $B$ sont deux ensembles disjoints donnés, contenus dans $\mathbb{Z}$, considérons l'ensemble $\Phi_{A,B}$ des applications $\phi$ de $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$ dans $[0,1]$ telles que $\phi(A\cup B) = \phi(A) + \phi(B)$. Cet ensemble est fermé dans $\mathfrak{F}$ car c'est l'image réciproque de l'ensemble fermé $\{0\}$ par la fonction continue $\phi \mapsto \phi(A\cup B) - \phi(A) - \phi(B)$.

Si maintenant $A$ est une partie de $\mathbb{Z}$ et si $n$ est un entier strictement positif, considérons l'ensemble $\Phi_{A,n}$ des applications $\phi$ de $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$ dans $[0,1]$ telles que $|\phi(A+1) - \phi(A)| \leq \frac{1}{n}$. Cet ensemble est fermé dans $\mathfrak{F}$ car c'est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ par la fonction numérique continue $\phi \mapsto |\phi(A+1) - \phi(A)|$.

Comme on sait que l'intersection d'une famille finie de fermés est encore un fermé, il en est ainsi des ensembles

$$\Phi' = \bigcap_{A\cap B=\emptyset} \Phi_{A,B} \quad \text{et} \quad \Phi''_n = \bigcap_{A\subset\mathbb{Z}} \Phi_{A,n}.$$

Il vient alors que l'ensemble $\Phi_n = \Phi \cap \Phi' \cap \Phi''_n$ est un fermé de $\mathfrak{F}$ pour tout entier $n$ strictement positif. Il est clair que $\Phi_n \neq \emptyset$. Vérifions maintenant que la famille $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ vérifie la propriété d'intersection finie.

En effet, si $n_1, ..., n_k$ sont des entiers arbitraires strictement positifs, en nombre fini, on vérifie aussitôt que

$$\Phi_n \subset \bigcap_{i=1}^{k} \Phi_{n_i} \quad \text{si} \quad n \geq \sup(n_1, ..., n_k).$$

On a donc bien $\Phi_{n_1} \cap ... \cap \Phi_{n_k} \neq \emptyset$. Il résulte alors de la compacité de $\mathfrak{F}$ que l'intersection de tous les ensembles $\Phi_n$ n'est pas vide. Un élément $\phi$ de cette intersection est une mesure exhaustive et normée sur $\mathbb{Z}$ qui vérifie $|\phi(A+1) - \phi(A)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $A \subset \mathbb{Z}$ et tout $n \geq 1$.

Cela n'est bien entendu possible pour $A$ fixé que si $\phi(A+1) = \phi(A)$. On en déduit alors par récurrence immédiate que $\phi(A+n) = \phi(A)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. □

Ce résultat s'étend aux groupes $\mathbb{Z}^m$ pour $m \geq 2$ en utilisant le même raisonnement. Ce qui est moins évident, c'est un autre théorème, dû à von Neumann, qui nous dit qu'une telle mesure (appelée *mesure de von Neumann*) existe sur n'importe quel groupe commutatif $G$ !

Pour $\mathbb{R}$, on considère alors le groupe additif quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui est justement commutatif. Soit alors $\nu$ une mesure de von Neumann sur ce groupe et soit $c$ la surjection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La restriction de $c$ à chacun des intervalles $[n, n+1[$ est une bijection, d'où l'idée de considérer pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ la trace $A_n = A \cap [n, n+1[$ puis de poser

$$\mu(A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu(c(A_n)).$$

Il est relativement facile de vérifier que la mesure $\mu$ ainsi définie est exhaustive, invariante par translation et normée sur $[0, 1]$. La même idée fonctionne parfaitement pour le plan $\mathbb{R}^2$, en utilisant cette fois le groupe additif quotient (commutatif) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. D'une manière générale on obtient le résultat suivant :

**5.3.4 Théorème. (AC)** *Sur l'espace numérique $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), il existe une mesure $\mu$ qui est à la fois exhaustive, invariante par translation et normée sur le cube unité.*

Bien entendu, l'invariance par translation n'entraine pas l'invariance par isométrie. Mais pour $\mathbb{R}$, on peut construire une mesure véritablement universelle car il n'y a sur la droite numérique que deux sortes d'isométries : les translations et les symétries centrales.

**5.3.5 Théorème. (AC)** *Sur la droite numérique $\mathbb{R}$, il existe une mesure $\mu$ universelle, c'est-à-dire exhaustive, simplement additive, normée sur le segment unité et invariante par isométrie.*

*Démonstration.* Rappelons-nous que toute symétrie centrale sur la droite numérique est la composée d'une translation et de la symétrie centrale de centre l'origine : $x \mapsto -x$. Il suffit alors de remplacer la mesure $\mu$ définie plus haut à l'aide d'une mesure de von Neumann par la nouvelle mesure $\mu' : A \mapsto \frac{1}{2}(\mu(A) + \mu(-A))$, et de vérifier que celles-ci a les propriétés souhaitées. □

Le cas de $\mathbb{R}^2$ complique bien les choses. En effet, on ne trouve plus non seulement des rotations et des symétries centrales mais également des rotations et des symétries axiales.

**5.3.6 Définition.** Nous appellerons *isométries directes* les isométries du plan qui conservent l'orientation du plan. Elles forment un groupe, que l'on note $G_2^+$, et qui n'est composé en fait que des translations et des rotations du plan.

**5.3.7 Théorème. (AC)** *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, il existe une mesure $\mu$ universelle, c'est-à-dire exhaustive, simplement additive, normée sur le carré unité et invariante par isométrie.*

*Démonstration.* Le groupe $SO_2$ des rotations de centre l'origine du plan est un groupe commutatif. On peut donc considérer une mesure de von Neumann $\nu$ sur ce groupe.

Il suffit alors de considérer la nouvelle mesure $\mu'$ définie par $\int \mu(r(A))d\nu(r)$, où $r$ parcourt $SO_2$. Celle-ci vérifie toutes les propriétés demandées, mis à part qu'elle n'est invariante que sous l'action du groupe $G_2^+$.

Il faut alors utiliser un résultat que nous ne démontrerons pas : si l'on compose toutes les isométries directes avec une symétrie axiale donnée, on obtient toutes les autres isométries. Il ne reste alors plus qu'à rendre notre mesure invariante par une certaine symétrie axiale $s$, ce qui se fait facilement en posant $\mu''(A) = \frac{1}{2}(\mu'(A) + \mu'(s(A)))$.

Cette mesure $\mu''$ a finalement toutes les propriétés demandées. $\square$

L'unicité d'une telle mesure n'est pas assurée. Toutefois, on peut démontrer que lorsque $A$ est quarrable (c'est-à-dire dont l'aire peut être approchée par des aires polygonales), $\mu(A)$ coïncide nécessairement avec l'aire de $A$.

Par exemple, on a pour toute mesure universelle $\mu$ de $\mathbb{R}^2$ et pour tout disque $D$ de rayon $r$ du plan :

$$\mu(D) = \pi r^2.$$

# Conclusion

## Résumons...

Il n'est pas facile de tout résumer sans se répéter. Malgré tout rappelons les points essentiels :

① Deux ensembles sont dits équidécomposables s'ils peuvent être "découpés" en deux familles de morceaux qui s'obtiennent les uns les autres par isométries. C'est une relation d'équivalence.

② Un ensemble est dit dédoublable s'il peut être "découpé" en deux morceaux (complémentaires), chacun équidécomposable à l'ensemble tout entier. Un groupe est dédoublable s'il est dédoublable comme ensemble sous l'action de ses translations. Un groupe libre de rang 2 est dédoublable.

③ Le groupe $SO_3$ contient deux éléments indépendants qui engendrent un groupe dédoublable. Il existe un ensemble dénombrable $D$ tel que l'ensemble $S_2 \setminus D$ soit dédoublable sous l'action de ce groupe. La sphère $S_2$ toute entière est dédoublable sous l'action de $SO_3$. On aboutit alors au fameux paradoxe de Banach-Tarski : deux ensembles bornés d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}^3$ sont équidécomposables.

④ Pour une sphère, quatre morceaux suffisent, mais pour une boule il faut au moins cinq morceaux. Sans l'axiome du choix, le paradoxe de Banach-Tarski est indémontrable, mais il existe le paradoxe de Dougherty-Foreman pour les réfractaires.

⑤ Le paradoxe de Banach-Tarski entraine qu'il n'existe aucun mesure universelle dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$. Il en existe par contre dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Voilà succinctement les principaux résultats que nous avons énoncés et/ou démontrés dans ce mémoire. Pour les curieux, il y a beaucoup de questions encore ouvertes.

# Quelques problèmes encore ouverts dans ce domaine

Stan Wagon a publié dans son livre une liste des problèmes encore ouverts dans le domaine qui nous a préoccupé jusqu'ici. Certains d'entre eux ont été résolus récemment, je l'indiquerai pour chacun des problèmes pour lequel je suis au courant qu'il a trouvé une solution. Pour les autres, ils intéressent sans doute beaucoup de mathématiciens, mais j'ai trouvé très peu d'articles à leur propos dans mes recherches.

Je ne citerai pas tous les problèmes en question, qui sont nombreux, car beaucoup d'entre eux me sont incompréhensibles et abordent des domaines qui relèvent du charabia pour ma part. En voilà tout de même certains.

**Problème 1 (Marczewski, 1930).** *Le cube unité de* $\mathbb{R}^3$ *est-il paradoxal via des morceaux possédant la propriété de Baire ?*

On rappelle qu'un espace topologique

**Problème 3 (Marczewski).** *La sphère* $S_2$ *peut-elle être décomposée en trois morceaux Lebesgue-mesurables qui sont deux à deux congruents ?*

**Problème 4 (De Groot, 1958).** *La duplication de boules peut-elle être effectuée en déplaçant les morceaux de façon continue et sans que leurs trajectoires ne se croisent ?*

**Problème 5.** *Y a-t-il dans le plan* $\mathbb{R}^2$ *un sous-ensemble dédoublable et borné ?*

**Problème 6.** *Le disque unité de* $\mathbb{R}^2$ *peut-il être décomposé en trois morceaux deux à deux congruents ?*

**Problème 7.** *Est-ce que* $SO_n$ *(*$n \geq 6$*) possède un sous-groupe libre de rang* $2$ *dont l'un des éléments possède* $-1$ *comme valeur propre ?*

Les problèmes 3 à 7 sont encore aujourd'hui sans réponse. Si ce mémoire vous a intéressé, peut-être pourriez-vous vous procurer [2] et vous laissez tenter ? Dans tous les cas, nous en avons fini pour l'instant avec le paradoxe de Banach-Tarski, mais malgré tout il reste, comme vous pouvez le voir, du travail.

Merci pour votre lecture attentive, j'espère que le sujet abordé vous aura intéressé !

# Biographies

## Felix Hausdorff

Felix Hausdorff (8 novembre 1868 - 26 nanvier 1942) était un mathématicien allemand, considéré comme l'un des fondateurs de la topologie moderne. Il est aussi l'auteur de travaux philosophiques et littéraires sous le pseudonyme de Paul Mongré.

Hausdorff étudia puis enseigna à Leipzig jusqu'en 1910, date à laquelle il devint professeur de mathématiques à Bonn. Quand le parti nazi arriva au pouvoir, Hausdorff, de confession juive, pensa qu'en tant que respectable professeur d'université il serait épargné par la persécution. Cependant ses travaux de mathématiques furent dénoncés comme "juifs", inutiles et "non-allemands", et il perdit donc son poste en 1935.

En 1942, quand il sentit qu'il ne pouvait plus éviter d'être envoyé en camp de concentration, il se suicida en même temps que sa femme et sa belle-soeur.

## Stefan Banach

Stefan Banach (30 mars 1892 - 1945) était un mathématicien polonais. Il a donné son nom aux espaces de Banach.

Il fait ses études primaires et secondaires à Cracovie, puis est allé poursuivre ses études universitaires à Lvov (Léopol en français) en Pologne (Ukraine actuelle) de 1910 à 1914. Pendant la guerre, il est réformé, travaille à la construction de routes et suit à l'Université de Cracovie les leçons de mathématiques.

En 1916, traversant un parc de Cracovie, Hugo Dyonizy Steinhaus entend prononcer les mots mesure de Lebesgue ; c'est ainsi qu'il fit la connaissance de deux jeunes mathématiciens Otto Nikodym et Stefan Banach. Ce fut le début d'une fructueuse collaboration.

En 1919, à l'initiative de Steinhaus, est créée la Société de Mathématiques de Cracovie, transformée en 1920 en Société de Mathématiques de Pologne. Banach y fait de nombreuses communications. En 1920, il devient assistant de Lomnicki à l'Université Technique de Lvov et en 1922 passe son habilitation. Il est nommé professeur en 1924.

En 1929, avec Steinhaus, il crée la revue Studia Mathematica consacrée à l'analyse fonctionnelle. En 1931 commence une série de publications sous le titre de Mathematical Monographs ; la direction est assurée par Banach et Steinhaus à Lvov ainsi que par Kuratowski, Mazurkiewicz, et Sierpinski à Varsovie.

En 1939, il est nommé président de la Société de Mathématiques de Pologne.

La seconde guerre fut une période de difficultés avec les occupations soviétique, puis nazie. Il put cependant rencontrer Sergueï Sobolev et Pavel Alexandroff en 1940. Malade, Banach meurt en 1945 à Lvov.

## Alfred Tarski

Alfred Tarski (14 janvier 1902 - 26 octobre 1983) était un logicien et philosophe polonais.

Après avoir reçu une excellente éducation générale et fait un court service militaire dans l'armée polonaise, Alfred Teitelbaum intègre la fraîchement ouverte université de Varsovie en 1918. Converti au catholicisme, il prend le nom de Tarski en 1923, alors qu'il avait déjà publié sous son premier nom. Il soutient sa thèse de doctorat (sous la direction de Stanislaw Lesniewski) également en 1923, consacrée à la théorie des ensembles. Il publie un texte avec Stefan Banach, contenant ce qu'on a qualifié par la suite de paradoxe de Banach-Tarski.

Dans les années 1922-1925, Tarski enseigne à l'Institut Pédagogique de Varsovie, pour être ensuite nommé Privat Docent de mathématiques et de logique à l'Université de Varsovie en devenant plus tard assistant de Jan Lukasiewicz. N'ayant cependant pas réussi à obtenir un poste à plein temps à cette même université, il enseigne parallèlement les mathématiques dans un des lycées varsoviens. Il épouse Maria Witkowska en juin

1929. Ensuite il part à Vienne en 1930 et, pour quelques mois supplémentaires, en 1935. Dans cette période, il publie (en 1933) son papier probablement le plus important, *Concept de vérité dans les langages des sciences déductives.*

Proche du Cercle de Vienne, il fait partie de l'École de Lvov-Varsovie, comme beaucoup de ses professeurs de l'Université de Varsovie. Il tente d'obtenir le poste de professeur à l'Université de Lvov mais ce projet échoue et Tarski (séjournant aux États-Unis depuis août 1939) décide de rester à l'étranger. Sa famille la plus proche l'y rejoint, à l'aide de nombreux amis européens qui participent à leur transfert. Le reste de sa famille meurt des mains des nazis. Après avoir enseigné dans plusieurs universités, Tarski obtient un poste permanent à l'université de Berkeley en Californie en 1942. Il n'arrête cependant pas de voyager : en 1950 - pour donner des cours au University College à Londres et en 1955 - à l'Institut Henri Poincaré à Paris. Tarski, pour ses travaux mathématiques et logiques, est rangé parmi les plus grands logiciens de l'histoire, aux côtés d'Aristote, Frege et Gödel.

# Bibliographie

## Pour approfondir le sujet :

[1] Hausdorff, F. (1914) - Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen - *Math. Ann., volume 75.*

[2] Wagon, S. (1985) - *The Banach-Tarski Paradox* - Cambridge University Press.

[3] French, R. - Le théorème de Banach-Tarski - *Pour la science, Février 1987.*

[4] Laczkovich, M. (1990) - Equidecomposability and discrepancy : A solution to Tarski's circle squaring problem - *Crelle's Journal of Reine and Angewandte Mathematik, volume 404.*

[5] Guinot, M. (1991) - *Le Paradoxe de Banach-Tarski* - Aléas Editeur.

[6] Dougherty, R. et Foreman, M. - Banach-Tarski paradox using pieces with the property of Baire - *PNAS of the USA, volume 89, Novembre 1992.*

[7] Reissman, A. - Le Paradoxe de Banach-Tarski - *Le journal de maths des élèves, 1994* - ENS Lyon.

[8] *Deuxième composition de mathématiques - CAPES 2004.*

## Ouvrages consultés pendant la rédaction :

[9] Schwartz, L. (1991) - *Analyse I, Théorie des ensembles et topologie* - Hermann.

[10] Gras, M.-N. et G. (2004) - *Algèbre fondamentale, Arithmétique* - Ellipses.

[11] Lang, S. (2005) - *Algebra (Revised third edition)* - Springer.

[12] Audin, M. (2006) - *Géométrie* - EDP Sciences.

[13] Faraut, J. (2006) - *Calcul Intégral* - EDP Sciences.

[14] Bordellès, O. (2006) - *Thèmes d'arithmétique* - Ellipses.

[15] Saint Raymond, J. (2007) - *Topologie, calcul différentiel et variable complexe* - Calvage-et-Mounet.

[16] Tauvel, P. (2007) - *Corps commutatifs et théorie de Galois* - Calvage-et-Mounet.