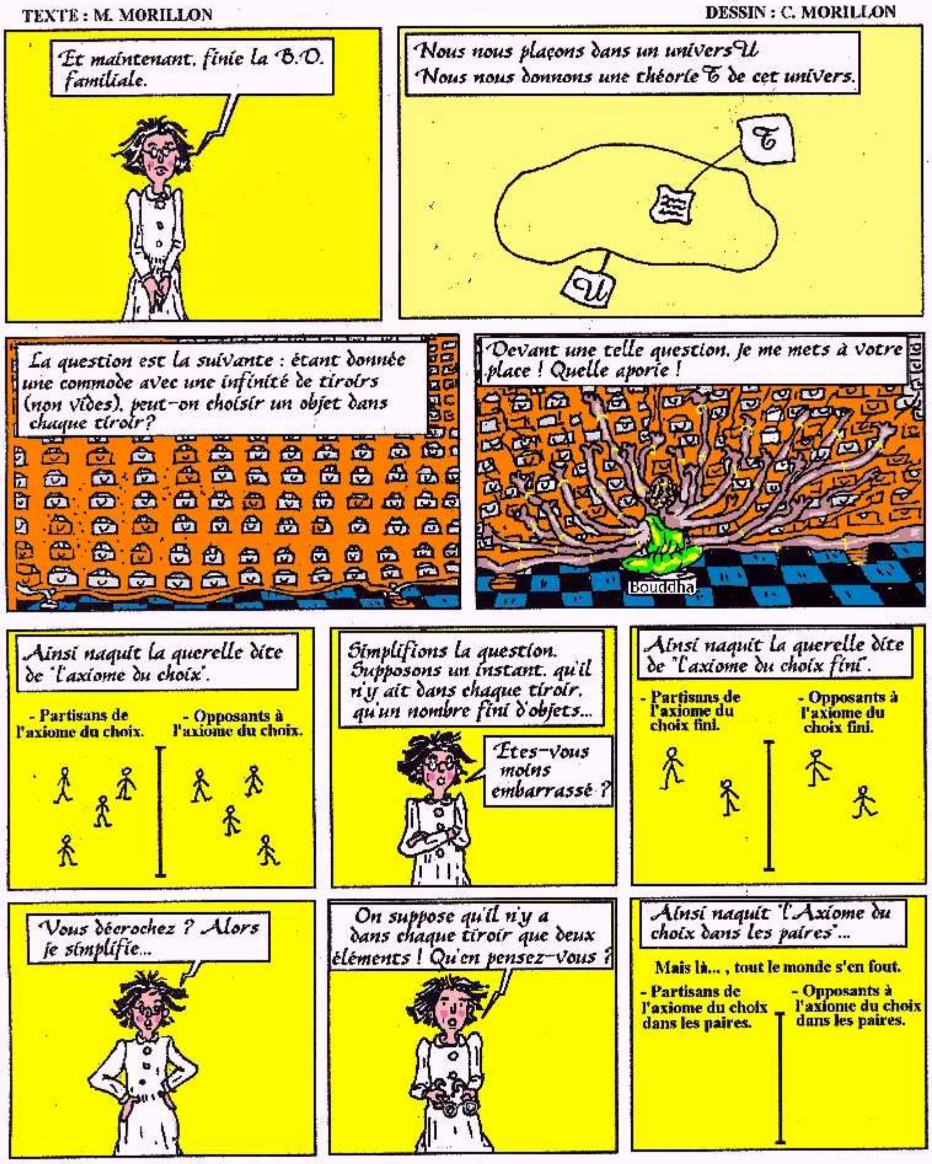
Autour de l'**axiome du choix**

RICHARD Sabine

2006

TEXTE : M. MORILLON DESSIN : C. MORILLON



1 Introduction

La théorie des ensembles est une des pierres fondatrices des mathématiques. En effet, cette théorie a joué un rôle important dans l'évolution des mathématiques au début du XX^{eme} siècle ainsi que dans la manière de les concevoir. De plus, les autres théories mathématiques reposent sur les définitions et les résultats qui découlent de la théorie des ensembles.

Cependant celle-ci fut à l'origine de nombreuses polémiques et ne fait pas toujours l'unanimité. Lorsqu'elle fut développée par Georg Cantor à la fin du XIX^{eme} siècle (ce qu'on appelle la théorie naïve ou intuitive des ensembles), les paradoxes auxquels elle conduisait ont remis en cause les fondements des mathématiques. Aussi d'autres mathématiciens dont Zermelo et Fraenkel l'ont retravaillée et ont développé une théorie axiomatique des ensembles afin d'éviter les paradoxes.

Aux axiomes de la théorie de Zermelo-Fraenkel on ajoute généralement l'axiome du choix. Il est nécessaire pour démontrer des résultats qui paraissent a priori intuitifs et implique d'importants théorèmes comme le théorème de Zorn (Soit u un ensemble ordonné dont toute partie bien ordonnée est majorée, alors u a un élément maximal) ou encore le fait que tout espace vectoriel admette une base.

La première partie de ce mémoire exposera la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel ; la seconde démontrera en particulier l'équivalence de trois énoncés de l'axiome du choix et, enfin, la dernière partie donnera une application de cet axiome.

2 Axiomes et définitions de base

2.1 L'axiomatique de Zermelo-Fraenkel

On se place dans l'univers U, collection de tous les ensembles, muni de la relation binaire notée $x \in y$ et appelée relation d'appartenance.

Axiome d'extentionnalité
Enoncé : *Si x et y sont deux ensembles ayant exactement les mêmes éléments, alors ils sont égaux.* Ce qui s'écrit :

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y].$$

Cet axiome donne, entre autres, l'unicité de l'ensemble vide qui sera défini par la suite.

Axiome de la paire
Enoncé : *Etant donnés deux ensembles x et y, il existe un ensemble z qui a*

comme éléments x et y, et eux seulement. Soit :

$$\forall x \forall y \exists z \forall t [t \in z \Leftrightarrow (t = x \ ou \ t = y)].$$

Cet ensemble z est unique d'après l'axiome d'extentionnalité et est noté $\{x, y\}$. Si $a \neq b$, l'ensemble $\{a, b\}$ est appelé paire. L'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ est noté (a,b) et est appelé paire ordonnée ou couple.

Théorème : Si $(a, b) = (a', b')$ alors $a = a'$ et $b = b'$.

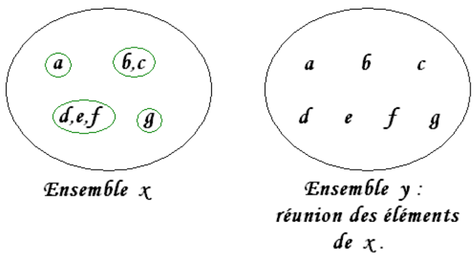
Démonstration : Si $a = b$ alors $(a, b) = \{\{a\}\}$ et (a, b) n'a qu'un seul élément; donc (a', b') n'a qu'un seul élément; donc $a' = b'$ d'où $\{\{a\}\} = \{\{a'\}\}$ et $a = a'$ et donc $a = a' = b = b'$.
Si $a \neq b$ alors (a, b) a deux éléments; donc (a', b') aussi, donc $a' \neq b'$. On a donc $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, par conséquent, soit $\{a\} = \{a', b'\}$ ce qui n'est pas possible d'après l'axiome d'extentionnalité car ces deux ensembles n'ont pas le même nombre d'éléments, soit $\{a\} = \{a'\}$ et $\{a, b\} = \{a', b'\}$, donc $a = a'$ et $b = b'$.

On définit de même les n-uplets et leurs cas d'égalité (par récurrence).

Axiome de la somme (ou de la réunion)
Enoncé : *Pour tout ensemble x, il existe un ensemble y dont les éléments sont les éléments des éléments de x.* Soit :

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \Leftrightarrow \exists t (t \in x \ et \ z \in t)].$$

L'ensemble y est unique d'après l'axiome d'extentionnalité et s'appelle réunion des éléments de x. Il se note $\cup x$ ou $\bigcup_{t \in \ x} t$.



Par exemple (voir figure ci-dessus) $x = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e, f\}, \{g\}\}$ et $y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; on a bien $a \in y$ car $a \in \{a\}$ et $\{a\} \in x$.

Ainsi, soient x, y, z trois ensembles, on note $\{x, y, z\}$ la réunion des éléments de $\{\{x, y\}, \{z\}\}$. $\{x, y, z\}$ est donc un ensemble. De même avec x_1, ... ,x_n un nombre fini d'ensembles , on définit (par récurrence) l'ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$. La réunion des éléments de $\{x_1, ..., x_n\}$ s'appelle réunion de x_1, ... ,x_n et se note

$x_1 \cup ... \cup x_n$.

Remarque : on a l'existence des singletons : soit a un ensemble, l'ensemble $\{a\}$ est la paire $\{a, b\}$ avec $a = b$.

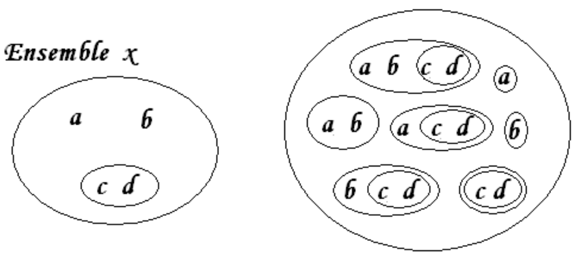
Axiome de l'ensemble des parties

Soient x et z deux ensembles, z est une partie ou un sous-ensemble de x si tous les éléments de z sont des éléments de x, c'est-à-dire si $\forall t(t \in z \Rightarrow t \in x)$. On dit aussi que z est inclus dans x et on note $z \subset x$.

Enoncé : *Pour tout ensemble x, il existe un ensemble y dont les seuls éléments sont les parties de x.* Soit :

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \Leftrightarrow z \subset x].$$

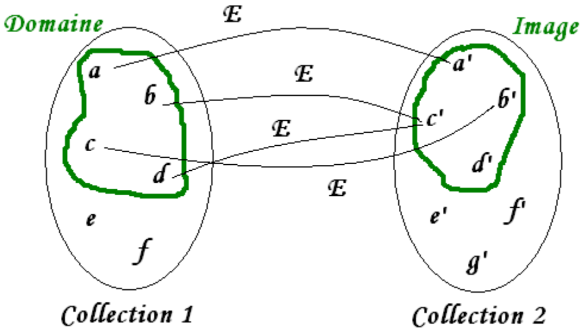
L'ensemble y est unique d'après l'axiome d'extentionnalité, il est appelé ensemble des parties de x et se note P(x) .



Ensemble P(x) des parties de x

Schéma d'axiomes de remplacement

Soit un énoncé $E(x, y, a_1, ..., a_n)$ à deux variables x et y et à n paramètres a_1,...,a_n, on dit que $E(x, y, a_1, ..., a_n)$ définit une relation fonctionnelle à un argument si $\forall x \forall y \forall y' \forall a_1, ..., \forall a_n [E(x, y, a_1, ..., a_n) \ et \ E(x, y', a_1, ..., a_n) \Rightarrow y = y']$.
La relation $\exists y E(x, y, a_1, ..., a_n)$ est appelée domaine de la fonctionnelle E.
La collection $\exists x E(x, y, a_1, ..., a_n)$ est appelée image de la relation fonctionnelle E.



Enoncé : *Soit* $E(x, y, a_1, ..., a_n)$ *un énoncé de paramètres* a_1,...,a_n *définissant une relation fonctionnelle à un argument, et soit* a *un ensemble quelconque, alors il existe un ensemble* b *dont les éléments sont les images des éléments de* a *qui se trouvent dans le domaine de* E.

Le schéma de remplacement (ou de substitution) est donc la liste infinie des énoncés suivants :

$$\forall x_1 ... \forall x_k \{\forall x \forall y \forall y' (E(x, y, x_1, ..., x_k) \textit{ et } E(x, y', x_1, ..., x_k) \Rightarrow y = y')$$

$$\Rightarrow \forall t \exists u \forall y [y \in u \Leftrightarrow \exists x (x \in t \textit{ et } E(x, y, x_1, ..., x_k))]\}$$

où $E(x, y, x_1, ..., x_k)$ est n'importe quel énoncé sans paramètre qui a au moins deux variables libres x et y.

Axiome de l'infini :
Cet axiome donne l'existence d'un ensemble ayant un nombre infini d'éléments. Il peut se formuler ainsi : $\exists x((\exists z \in x) \textit{ et } (\forall z \in x, z \cup \{z\} \in x))$.

L es axiomes d'extentionnalité, de la paire, de la réunion, de l'ensemble des parties, de substitution et de l'infini forment la théorie des ensembles de Zermelo Fraenkel.

2.2 Autres notions utiles

Schéma de compréhension
Enoncé : *Soit un ensemble* a *et un énoncé* $A(x, a_1, ..., a_n)$ *à une variable libre et à paramètres* a_1,...,a_n, *il existe un ensemble* b *dont les éléments sont ceux de* a *qui satisfont à l'énoncé* A.

Le schéma de compréhension est donc la liste infinie des énoncés suivants :

$$\forall x_1 ... \forall x_k \forall x \exists y \forall z [z \in y \Leftrightarrow (z \in x \textit{ et } A(z, x_1, ..., x_n))]$$

où $A(x, x_1, ..., x_k)$ est n'importe quel énoncé sans paramètre qui a au moins une variable libre x.

Le schéma de remplacement dit que l'image d'un ensemble par une relation fonctionnelle est un ensemble, tandis que le schéma de compréhension dit qu'à partir d'un ensemble on obtient un autre ensemble à l'aide de tout énoncé à au moins une variable libre.

Le Shéma de compréhension découle du schéma de remplacement : *En effet l'axiome de remplacement appliqué à l'ensemble a et à l'énoncé $E(x, y, a_1, ..., a_n)$ défini par " $y = x$ et $A(x, a_1, ..., a_n)$ " donne l'existence de l'ensemble b car E définit ainsi une relation fonctionnelle. On note $b = \{x \in a; A(x, a_1, ..., a_n)\}$.*

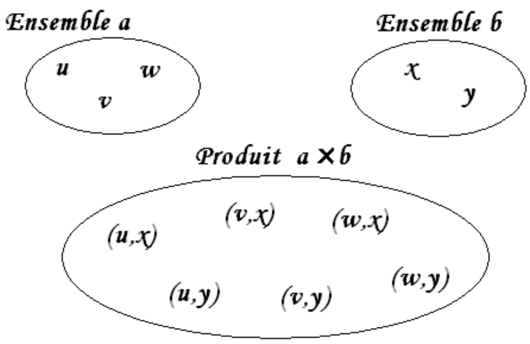
Théorème : Il existe un unique ensemble n'ayant aucun élément.

Démonstration :L'unicité est donnée par l'axiome d'extentionnalité. Soit a un ensemble, considérons l'ensemble b défini par : $\forall x (x \in b) \Leftrightarrow (x \in a$ et $x \neq x)$. Cet ensemble b est vide et existe d'après le schéma de compréhension appliqué à l'ensemble a avec l'énoncé $x \neq x$.

On appelle cet ensemble l'ensemble vide et on le note $\emptyset$.

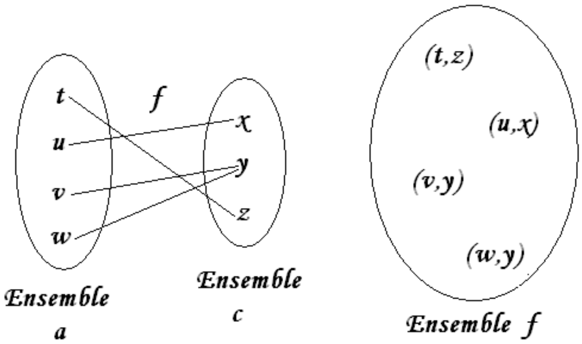
Intersection et différence de deux ensembles
Soient a et b deux ensembles. L'ensemble $\{x \in a; x \in b\}$ s'appelle l'intersection de a et de b, il se note $a \cap b$. L'ensemble $\{x \in a; x \notin b\}$ s'appelle la différence ensembliste de a et b.

Produit de deux ensembles
Soient a et b deux ensembles. La collection X des couples (x, y) tels que $x \in a$ et $y \in b$ est un ensemble et est appelé produit de a et b; il est noté $a \times b$.



Démonstration : X est bien un ensemble. En effet si $x \in a$ et $y \in b$ alors $(x, y) = \{x, \{x, y\}\} \in P(P(a \cup b))$. $P(P(a \cup b))$ est un ensemble d'après l'axiome de l'ensemble des parties. Soit l'énoncé $X(z) = \exists x \exists y [z = (x, y)$ et $x \in a$ et $y \in b]$. X est l'ensemble donné par le schéma de compréhension appliqué à $P(P(a \cup b))$ avec l'énoncé $X(z)$.

Fonction, famille d'ensembles
Soit $R(x, y)$ une relation fonctionnelle à un argument de domaine un ensemble a et d'image c. La collection f des couples $(x, y) \in a \times c$ tels que $R(x, y)$ est un ensemble. f est appelée fonction définie sur a, ou application de domaine a, ou encore famille d'ensembles indexés par a (dans ce dernier cas, on utilise la notation $(y_x)_{x\in a}$). Son domaine a est noté $Dom(f)$ et son image c est notée $Im(f)$.



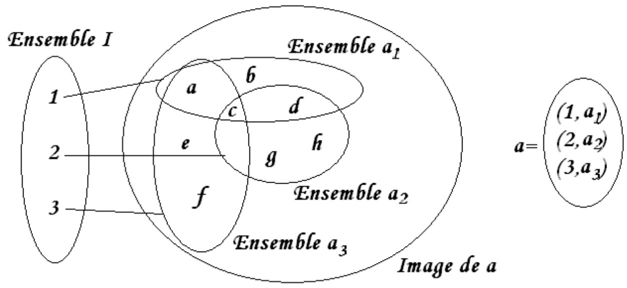
Démonstration : Montrons que f est bien un ensemble. $R(x, y)$ est une relation fonctionelle et a est un ensemble donc d'après l'axiome de remplacement, c est un ensemble ; par conséquent $a \times c$ est un ensemble. On a $\forall(x, y)[(x, y) \in f \Leftrightarrow ((x, y) \in a \times c$ et $R(x, y))]$, donc d'après le schéma de compréhension f est un ensemble.

Soient a et b deux ensembles, une application f de a dans b est une application de domaine a dont l'image est contenue dans b. On note : $f : a \to b$.

Soient a et b deux ensembles, la collection des applications de a dans b est un ensemble noté b^a.

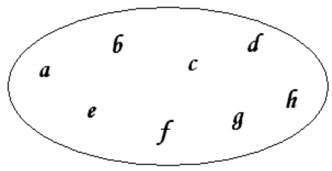
Démonstration : notons A cette collection. Soit f une application de a dans b, on a $f \subset a \times b$ donc $f \in P(a \times b)$. On applique le schéma de compréhension à l'ensemble $P(a \times b)$ avec l'énoncé $A(f) =$ "f est une application de a dans b" et on obtient que A est un ensemble.

Réunion, intersection et produit d'une famille d'ensembles
Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexés par un ensemble I.



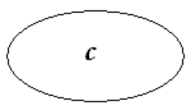
a famille d'ensembles

On appelle réunion de la famille $a = (a_i)_{i \in I}$ la réunion des éléments de l'image de la fonction a. C'est un ensemble d'après l'axiome de la somme, il est noté $\bigcup_{i \in I} a_i$ et vérifie $\forall x[x \in \bigcup_{i \in I} a_i \Leftrightarrow \exists i(i \in I \ et \ x \in a_i)]$.



réunion de la famille $(a_i)_{i \in I}$

On appelle intersection de la famille $a = (a_i)_{i \in I}$ la collection définie par l'énoncé $X(x)$: $\forall i(i \in I \Rightarrow x \in a_i)$. Si I est un ensemble non vide, on prend $i_0 \in I$ et l'intersection est un ensemble d'après le schéma de compréhension appliqué à l'ensemble a_{i_0} avec l'énoncé $X(x)$; on le note $\bigcap_{i \in I} a_i$. Si $I = \emptyset$ on ne trouve pas d'ensemble auquel appliquer l'axiome de compréhension, dans ce cas l'intersection est la collection de tous les ensembles et n'est pas un ensemble.

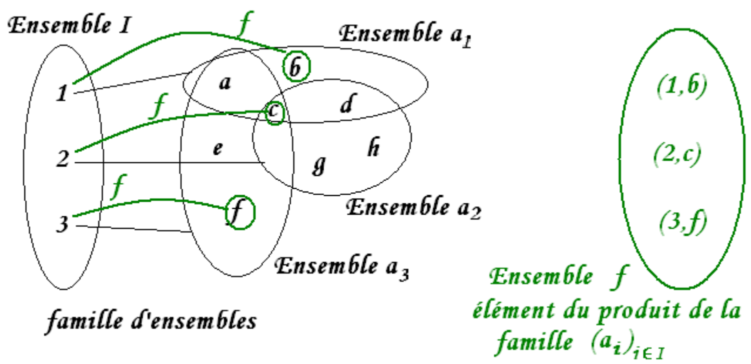


Intersection de la famille $(a_i)_{i \in I}$

Démonstration : La collection E de tous les ensembles n'est pas un ensemble. Montrons tout d'abord que la collection X des ensembles ne se contenant pas

n'est pas un ensemble. Supposons que $\forall x(x \notin x \Leftrightarrow x \in a)$, dans ce cas on a $a \notin a \Leftrightarrow a \in a$ ce qui est absurde. Il s'agit du paradoxe de Russel.
Supposons à présent que E soit un ensemble : $\forall x(x \in E)$ soit l'énoncé $A(x) : x \notin x$ alors, d'après le schéma de compréhension appliqué à E avec l'énoncé $A(x)$, la collection X des ensembles ne se contenant pas, est un ensemble ; ce qui est faux.

En appliquant le schéma de compréhension à l'ensemble $(\bigcup_{i\in I} a_i)^I$ avec l'énoncé $E(f)$: $f \in (\bigcup_{i\in I} a_i)^I$ *et* $f(i) \in a_i$ on obtient un ensemble appelé produit de la famille $(a_i)_{i\in I}$. Cet ensemble est noté $\prod_{i\in I} a_i$.

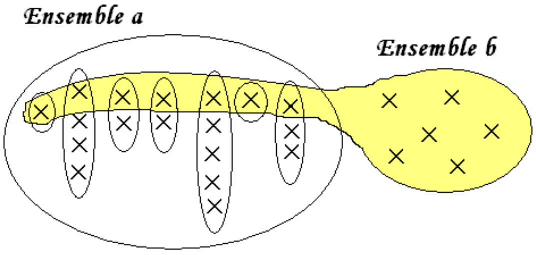


Si la fonction $a = (a_i)_{i\in I}$ est l'identité de I dans I on utilisera les notation suivante : $\cup a_i$, $\cap a_i$ (qui n'existe que si $I \neq \emptyset$) et $\prod a_i$ sans indexation. On a $\cup\emptyset = \emptyset$ et $\prod\emptyset = \{\emptyset\}$.

3 Trois énoncés pour l'axiome du choix

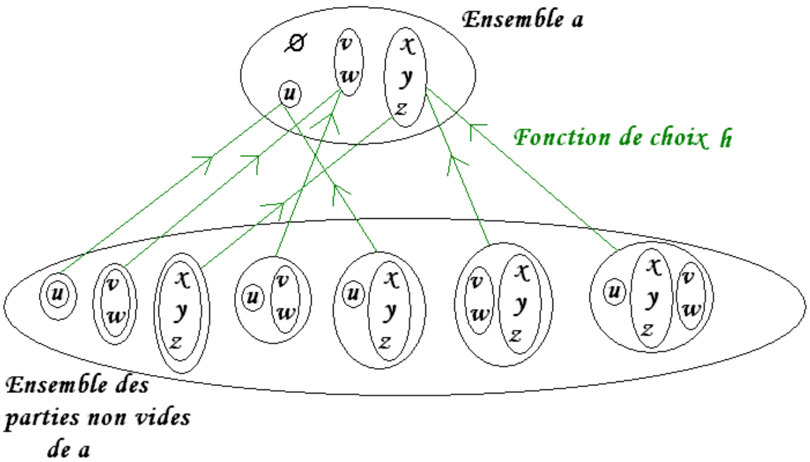
Il existe de nombreux énoncés équivalents de l'axiome du choix. Les trois suivants sont donnés indifféremment lorsqu'on énonce une théorie axiomatique des ensembles. On les notera AC (pour axiome du choix), AC' et AC".

AC : Pour chaque ensemble a, dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble b dont l'intersection avec chaque élément de a est un ensemble à un seul élément.



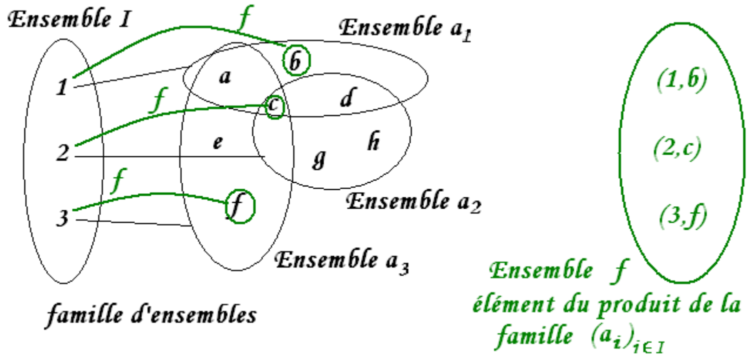
Axiome du choix AC

AC' : Pour tout ensemble a, il existe une application h de l'ensemble des parties non vides de a dans a telle que $h(x) \in x$ pour toute partie x non vide de a. Cette fonction s'appelle fonction de choix



Exemple de fonction de choix pour AC'

AC" : Le produit d'une famille d'ensembles non vides est non vide.

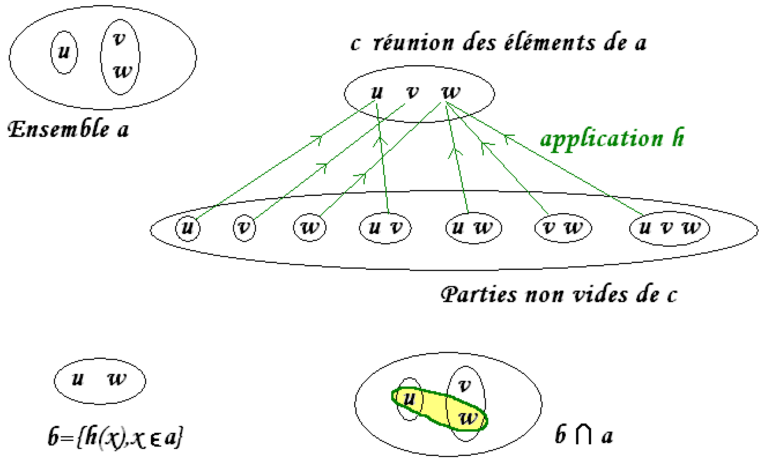


AC' $\Rightarrow$ AC

Soit a un ensemble. On pose $c =$ réunion des éléments de a. Appliquons AC' à c : il existe une application h des parties non vide de c dans c telle que $h(x) \in x$ pour toute partie x non vide de c. On remarque que chaque élément x de a est une partie non vide de c. Considérons la collection $b = \{h(x); x \in a\}$.

b a exactement un élément en commun avec chaque élément de a : en effet $h(x) \in c$ donc $h(x)$ est un élément d'un élément de a, si $x \in a$ on a $h(x) \in x$ donc l'intersection de b et avec chaque élément de a est non vide.
De plus si les éléments de a sont non vides et deux à deux disjoints alors $\{h(x), x \in a\} \cap y = \{h(y)\}$ avec $y \in a$. En effet $h(y) \in y$ par définition de h et $h(y) \in \{h(x), x \in a\}$ car $y \in a$ donc $h(y)$ appartient bien à l'intersection considérée. De plus si $\{h(x), x \in a\} \cap y$ n'était pas réduit à un seul élément on trouverait $z \neq y$, $z \in a$ et $y \in a$, tels que $\{h(y), h(z)\} \subset (\{h(x), x \in a\} \cap y)$.On aurait alors $h(z) \in y$, à cause de l'inclusion précédente, et $h(z) \in z$, par définition de h, par conséquent $y \cap z$ serait non vide, ce qui est exclus car les éléments de a sont supposés disjoints.

b est un ensemble : h est une relation fonctionnelle de domaine $P(c) - \emptyset$ or $a \subset (P(c) - \emptyset)$ donc on peut considérer h comme une relation fonctionnelle de domaine a. Grâce à l'axiome de remplacement appliqué à a avec h on obtient que b est un ensemble.



On a donc montré, en supposant AC', que pour tout ensemble a, dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble b dont l'intersection avec chaque élément de a est un ensemble à un seul élément.

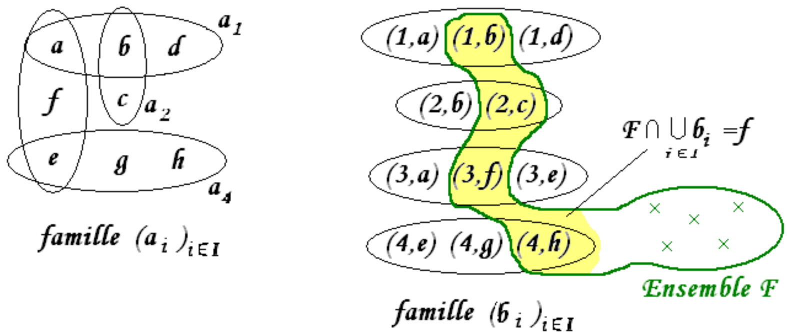
AC $\Rightarrow$ AC"

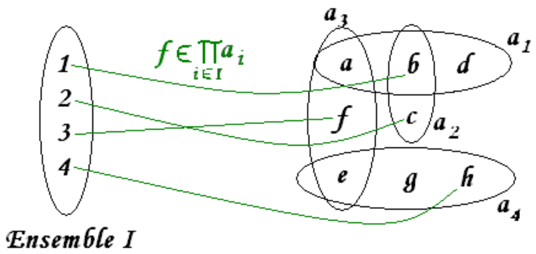
Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles non vides indexée par un ensemble I. On pose $b_i = i \times a_i$. b_i est donc par définition l'ensemble des couples (i, x) avec $x \in a_i$.

La famille $(b_i)_{i \in I}$ est formée d'ensembles non vides et disjoints deux à deux. En effet a_i est non vide par hypothèse donc il existe $y \in a_i$, donc $(i, y) \in b_i$ d'où b_i est non vide. De plus si $(a, x) \in (b_i \cap b_j)$ alors $(a, x) = (i, x)$ et $(a, x) = (j, x)$ donc $i = j$, par conséquent les b_i sont disjoints.

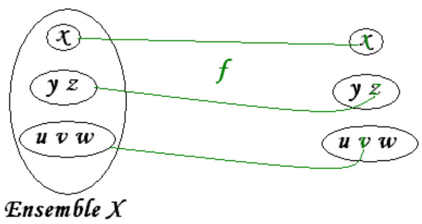
On applique AC à la famille $(b_i)_{i \in I}$: il existe un ensemble F dont l'intersection avec chaque élément de la famille, c'est-à-dire avec chaque b_i, est un ensemble à un seul élément : $F \cup b_i$ a un seul élément pour tout i.

On considère l'ensemble $F \cap \bigcup_{i \in I} b_i$. Si (i, x) et (i, y) appartiennent à $F \cap \bigcup_{i \in I} b_i$ alors $(i, x) \in F \cup b_i$ et $(i, y) \in F \cup b_i$ or $F \cup b_i$ n'a qu'un seul élément donc $(i, x) = (i, y)$ et donc $x = y$. Par conséquent $F \cap \bigcup_{i \in I} b_i$ définit une application f de I dans $\bigcup_{i \in I} a_i$: on a $f(i) = x$ avec x déterminé par $\{(i, x)\} = F \cap b_i$. De plus, on a $(i, x) \in F \cap \bigcup_{i \in I} b_i \Rightarrow (i, x) \in b_i \Rightarrow x \in a_i$ donc $f(i) \in a_i$ pour tout i. Par conséquent $f \in \prod_{i \in I} a_i$ d'où $\prod_{i \in I} a_i$ *est non vide.*





AC" $\Rightarrow$ AC'
Soit a un ensemble quelconque. On forme le produit $P = \prod\{x, x \subset a, x \neq \emptyset\}$. D'après AC" cet ensemble P est non vide. (Remarque : si a est vide P est le produit vide c'est-à-dire $P = \{\emptyset\}$ qui n'est pas l'ensemble vide.) Si on note $X = \{x, x \subset a, x \neq \emptyset\}$, P s'écrit aussi $\prod_{x\in X} a_x$ avec $a_x = x$. Soit f un élément de ce produit, on a par définition $f(x) \in a_x$ et donc $f(x) \in x$ pour toute partie non vide x de a. f est donc une fonction de choix et on a AC'.



On a ainsi démontré l'équivalence des trois énoncés AC, AC' et AC".

4 Une application de l'axiome du choix

Il arrive couramment que l'on utilise implicitement l'axiome du choix dans des démonstrations qui paraissent intuitives. Cependant, si on affine ces démonstrations, on finit par se rendre compte de sa nécéssité. C'est par exemple le cas quand on veut démontrer la proposition : *toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable*.

Pour démontrer cette proposition on va utiliser l'axiome du choix dénombrable. C'est un résultat qui découle directement de l'axiome du choix mais qui est cependant moins fort.

Rappelons tout d'abord quelques définitions de base :
On dit qu'un ensemble X est *dénombrable* si X peut être mis en bijection avec l'ensemble N des entiers naturels.
Une application $f : E \rightarrow F$ est une *injection* de E dans F si $\forall x \in E, \forall x' \in E(\exists y \in F, (x,y) \in f \ et \ (x',y) \in f) \Rightarrow (x = x')$.
Une application $f : E \rightarrow F$ est une *surjection* de E dans F si $\forall y \in F, \exists x \in E, (x,y) \in f$.
Une application $f : E \rightarrow F$ est une *bijection* si elle est à la fois une injection et une surjection.

AC dénombrable
Comme pour l'axiome du choix on a plusieurs énoncés équivalents (l'équivalence ne sera pas démontrée ici) :
Un produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.
Tout ensemble dénombrable possède une fonction de choix.

Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
Soit $(a_i)_{i \in I)}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables, c'est-à-dire a_i est dénombrable pour tout i et l'ensemble I est dénombrable. Montrons que $\bigcup_{i \in I} a_i$ est dénombrable.

Montrer que $\bigcup_{i \in I} a_i = \{x, \exists i(i \in I \ et \ x \in a_i)\}$ est dénombrable revient à montrer que $\{(i,x), x \in a_i, i \in I\}$ est dénombrable car

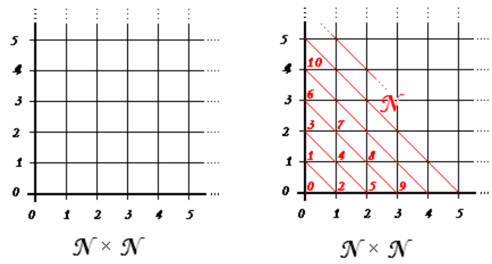
$$F : \{x, \exists i(i \in I \ et \ x \in a_i)\} \rightarrow \{(i,x), x \in a_i, i \in I\}$$

est une bijection, donc si l'un des ensembles est en bijection avec N l'autre l'est aussi. En effet , en notant $E_1 = \{x, \exists i(i \in I \ et \ x \in a_i)\}$ et $E_2 = \{(i,x), x \in a_i, i \in I\}$, supposons $x \in E_1$ et $y \in E_1$ tels que $F(x) = F(y)$, c'est-à-dire tels que $(i,x) = (j,y)$ avec $x \in a_i$ et $y \in a_j$. On a alors une égalité entre deux couples et donc $i = j$ et $x = y$. Donc F est injective. Soit maintenant $(i,x) \in E_2$, par définition $i \in I$ et $x \in a_i$ donc $x \in E_1$ et est un antécédent de (i,x) pour F. Donc F est surjective, donc bijective.

Montrons qu'il existe une bijection entre $E_2 = \{(i,x), x \in a_i, i \in I\}$ et $N \times N$.
On sait que l'ensemble I est dénombrable donc il existe une bijection $f : I \rightarrow N$, et que a_i est dénombrable pour tout i donc, pour tout i, il existe une bijection $b_i : a_i \rightarrow N$. On pose alors $B : E_2 \rightarrow N \times N \ \ (i,x) \mapsto (f(i), b_i(x))$. B est une bijection : en effet supposons que $(i,x) \in E_2$ et $(j,y) \in E_2$ aient la même image par

B, on aurait l'égalité des couples $(f(i), b_i(x))$ et $(f(j), b_j(y))$ et donc $f(i) = f(j)$ et $b_i(x) = b_j(y)$. Or f est une bijection donc on a $i = j$ et $b_i(x) = b_j(y)$; donc $b_i(x) = b_i(y)$ et donc $x = y$ car b_i est une bijection. D'où B est injective. Soit $(u, v) \in N \times N$, f est une bijection donc il existe i tel que $f(i) = u$; b_i est une bijection donc il existe x tel que $b_i(x) = v$. Par conséquent $(u, v) = B(i, x)$ et donc B est surjective et donc B est bijective.
Il faut cependant justifier le fait que l'on puisse choisir les b_i. En effet on sait que pour chaque i il existe une bijection $b_i : a_i \to N$ mais il n'en existe pas forcément une seule et on doit justifier qu'il existe un choix simultané pour tout i c'est-à-dire qu'il existe une famille $(b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} B_i$ où B_i désigne l'ensemble des bijections de a_i dans N. Pour tout i, l'ensemble B_i est non vide car a_i est dénombrable. On considère le produit dénombrable $\prod_{i\in I} B_i$ des B_i. C'est un produit dénombrable d'ensembles non vide, d'après AC dénombrable il est non vide et donc il existe une famille $(b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} B_i$. Par conséquent il existe un choix pour les b_i.

Reste à montrer que $N \times N$ est en bijection avec N. Un ensemble est en bijection avec N si on peut "numéroter" ces éléments. Pour $N \times N$ on procède ainsi :



On a une bijection : $(0, 0) \mapsto 0$, $(0, 1) \mapsto 1$, $(1, 0) \mapsto 2$, $(0, 2) \mapsto 3$, $(1, 1) \mapsto 4$, $(2, 0) \mapsto 5$, $(0, 3) \mapsto 6$, ...
Si pour (n, m) on note $k = (n+m)+(n+m-1)+(n+m-2)+...+2+1$ (c'est le nombre de points sur les diagonales précédentes, en effet $n+m$ est constant sur une diagonale et chaque diagonale possède n+m+1 points), on a : $(n, m) \mapsto k+n$.

Ainsi on a montrer qu'il y a des bijections

$$\bigcup_{i\in I} a_i = \{x, \exists i(i \in I \ et \ x \in a_i)\} \to \{(i, x), x \in a_i, i \in I\} \to N \times N \to N$$

et donc que $\bigcup_{i\in I} a_i$ est dénombrable.

5 Conclusion

Il n'est pas dérangeant de choisir un élément dans un ensemble non vide, tout le monde s'accordera sur le fait que c'est une opération légitime car il suffit d'expliciter l'élément en question pour pouvoir s'en servir. De même, on admet qu'on puisse choisir un élément par ensemble pour un nombre fini d'ensembles non vides (c'est-à-dire qu'un produit fini d'ensembles non vides est non vide).

On ne peut cependant rien affirmer lorsque l'opération de choix s'effectue une infinité de fois, en effet on ne peut pas expliciter un choix simultané d'une infinité d'éléments. C'est là qu'intervient l'axiome du choix. C'est lui qui affirme qu'il est légitime de construire des objets mathématiques en répétant un nombre infini de fois l'opération de choisir un élément dans un ensemble non vide.

Aujoud'hui cet axiome est accepté par la plupart des mathématiciens car il conduit à des résultats qu'on ne remet pas en cause. Néanmoins des études ont montré que l'axiome du choix est totalement indépendant des axiomes du système de Zermelo-Fraenkel, c'est-à-dire qu'il n'existe de démonstration ni de l'axiome du choix, ni de sa négation à partir des axiomes du système ZF. Deux possibilités s'offrent alors : soit ajouter l'axiome du choix au système ZF (et on obtient le système axiomatique ZFC), soit le rejeter. Ainsi des théories sont entièrement développées sans faire appel à l'axiome du choix et le débat concernant son adoption n'est toujours pas clos.

6 Références

Livres

Jean-Louis Krivine, *Théorie des ensembles*, Cassini, Paris, 1998.
Fritz Reinhart et Heinrich Soeder, *Atlas des mathématiques*, Librairie Générale Française, 1997.

Internet

Encyclopédie libre Wikipédia : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix
Xavier Caruso : http ://boumbo.toonywood.org/xavier/maths/choix.pdf
Patrick Dehornoy : http ://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/surveys.html