UFR de Mathématiques et Informatique de STRASBOURG

Mémoire de première année de Magistère

Année 2007/2008

GROUPES D'HOMOTOPIE ET THÉORÈME DE WHITEHEAD

Présenté par Camille Clochec

Maître de mémoire : Gael Collinet

TABLE DES MATIÈRES

Contents

INTRODUCTION

Pour Bertrand Russel, les mathématiques se définissent comme étant une science où on ne sait ni de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai. Bien que cette assertion fasse généralement penser en premier lieu à la théorie des ensembles, la première part se vérifiera en partie dans ce mémoire, où l'on sera amené à parler d'ojets, certe parfaitement définis par la théorie, mais le plus souvent impossibles à calculer, exprimer ou même à se représenter. La version du théorème de Whitehead qui sera démontrée est elle même d'un intérêt pratique des plus restreints, étant donné qu'on ne sait pas, en règle générale, calculer les groupes d'homotopie π_n. Ceci n'enlève toutefois rien à la beauté de ce théorème.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la notion d'homotopie, ce qui nous permettra de définir ensuite le groupe de Poincaré $\pi_1(\mathrm{X})$ d'un espace topologique pointé X, puis, à l'aide des espaces de suspension et de lacets, les groupes d'homotopie $\pi_n(\mathrm{X})$. On introduira ensuite la notion de revêtement, afin de démontrer le théorème de Van Kampen.

Dans la troisième partie, on donnera quelques notions sur les catégories et les foncteurs, afin de mieux comprendre les relations entre espaces topologiques qu'on a introduites avec π_n. On opèrera ensuite un retour sur les groupes d'homotopie pour introduire fibrations et groupes d'homotopie relatifs, ce qui nous permettra d'établir le fait que la suite d'homotopie d'une paire d'espaces topologiques est exacte. Enfin, dans la dernière partie, on étudiera les CW-complexes, sur lesquels s'applique le théorème de Whitehead, avant de démontrer le théorème proprement dit.

1 NOTION D'HOMOTOPIE

1.1 Homotopies entre morphismes d'espaces pointés

Nous travaillons dans des *espaces topologiques pointés*, c'est à dire des couples $(X\ ,\ x_0)$ dans lesquels X est un espace topologique et x_0 est un point fixé de X, appelé *point base*.

Un morphisme d'espaces pointés $f\ :\ (X\ ,\ x_0) \longrightarrow (Y\ ,\ y_0)$ est une application continue $f\ :\ X \longrightarrow Y$ telle que l'on ait $f(x_0) = y_0$. On notera $Mor_{Top_*}((X\ ,\ x_0), (Y\ ,\ y_0))$ (ou encore $Hom((X, x_0), (Y, y_0))$ l'ensemble des morphismes d'espaces pointés de $(X\ ,\ x_0)$ dans $(Y\ ,\ y_0)$.

On prendra par la suite les notations suivantes : un espace topologique sera noté en italique, et un espace topologique pointé sera noté en lettres droites.

Remarque : Cette notation semble suggérer qu'un espace topologique pointé ne dépend pas du choix du point base, bien que ce ne soit pas le cas. Par la suite, le point base ne sera explicité que si le besoin s'en fait sentir.

Définition 1.1. Soient X et Y deux espaces topologiques pointés. On dit que deux morphismes f_0 et f_1 de $Mor_{Top_*}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $H\ :\ \mathrm{X} \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Y}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \epsilon X & H(x,0) = f_0(x) \\ \forall x \epsilon X & H(x,1) = f_1(x) \\ \forall t \epsilon [0,1] & H(x_0,t) = y_0 \end{cases} .$$

Dans ce cas, on écrit $f_0 \sim f_1$, et H est appelée *homotopie* entre f_0 et f_1.

Exemple : Notons S^1 l'espace pointé $(\{z \epsilon C / \mid z \mid = 1\}, 1)$ et Y l'espace pointé $(\{z \epsilon C / 0 < \mid z \mid < 1\})$. Les deux morphismes d'espaces pointés f_0 et f_1 définis par :

$$f_0\ :\ z \longmapsto z$$
$$f_1\ :\ z \longmapsto \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}$$

sont homotopes.

Il suffit en effet de considérer l'application $H : \begin{cases} X \times [0,1] \longrightarrow Y \\ (z,t) \longmapsto t f_0(z) + (1-t) f_1(z) \end{cases}$ qui vérifie de manière immédiate les conditions de la définition 1.1.

Lemme 1.2. *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques pointés. La relation d'homotopies est une relation d'équivalence sur* $Mor_{Top_*}(X, Y)$

Démonstration : cette relation est bien :

- réflexive : soit f appartenant $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Il suffit de considérer l'application $\begin{cases} H: & X\times[0,1] \longrightarrow Y \\ & (x,t) \longmapsto f(x) \end{cases}$;
- symétrique : soient $f_1$et f_2 dans $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, et H définissant l'homotopie entre $f_1$et f_2. Alors

$$H' : \begin{cases} X\times[0,1] \longrightarrow X \\ (x,t) \longmapsto H(x,1-t) \end{cases}$$

  est bien une homotopie entre $f_1$et f_2 ;
- transitive : soient f_0, f_1, f_2 dans $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, telles que $f_0 \sim f_1$ et $f_1 \sim f_2$. Notons H_1 une homotopie entre f_0 et f_1 et H_2 une homotopie entre f_1 et f_2. Considérons l'application $H : \begin{cases} X\times[0,1] \longrightarrow Y \\ (x,t) \longmapsto \begin{cases} H_1(x,2t) \; si \; t\epsilon[0,\frac{1}{2}] \\ H_2(x,2t-1) \; si \; t\epsilon[\frac{1}{2},1] \end{cases} \end{cases}$.
  Alors H est bien continue, telle que

$$\begin{cases} \forall x\epsilon X & H(x,0) = H_1(x,0) = f_0(x) \\ \forall x\epsilon X & H(x,1) = H_2(x,1) = f_2(x) \\ \forall t\epsilon[0,1] & H(x_0,t) = \begin{cases} H_1(x_0,2t) = f_0(x_0) = y_0 \; si \; t\epsilon[0,\frac{1}{2}] \\ H_2(x_0,2t-1) = f_2(x_0) = y_0 \; si \; t\epsilon[\frac{1}{2},1] \end{cases} \end{cases}.$$

  D'où $f_0 \sim f_2$.

Ceci nous permet d'introduire la définition suivante :

Définition 1.3. Le quotient $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\sim$ est noté [X,Y] et est appelé l'*ensemble des classes d'homotopie pointées de* X *dans* Y. La classe d'équivalence d'un morphisme f de $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est notée $[f]$.

Proposition 1.4. *Soient* X, Y *et* Z *trois espaces pointés. La composition*

$$Mor_{Top_*}(X,Y) \times Mor_{Top_*}(Y,Z) \longrightarrow Mor_{Top_*}(X,Z)$$

$$(f,g) \longmapsto g\circ f$$

passe au quotient pour la relation d'équivalence d'homotopie et fournit une application

$$[X,Y]\times[Y,Z] \longrightarrow [X,Z]$$

$$([f],[g]) \longmapsto [g\circ f]$$

Démonstration : Soient f_0 et f_1 deux éléments de $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ tels que $[f_0]=[f_1]$, g_0 et g_1 deux éléments de $Mor_{Top_*}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ tels que $[g_0]=[g_1]$. Montrons que $[g_0\circ f_0]=[g_1\circ f_1]$. Pour cela, considérons H_f et H_g deux homotopies entre f_0, f_1 et g_0, g_1 respectivement. Définissons alors l'application

$$H\ :\ \begin{cases} X\times[0,1]\longrightarrow Z \\ (x,t)\longmapsto H_g(H_f(x,t),t) \end{cases} .$$

Alors H est continue en tant que composée de fonctions continues, et

$$\begin{cases} \forall x\epsilon X & H(x,0)=H_g(H_f(x,0),0)=g_0\circ f_0(x) \\ \forall x\epsilon X & H(x,1)=H_g(H_f(x,1),1)=g_1\circ f_1(x) \\ \forall t\epsilon[0,1] & H(x_0,t)=H_g(H_f(x_0,t),t)=H(y_0,t)=z_0 \end{cases} .$$

D'où $[g_0\circ f_0]=[g_1\circ f_1]$.

1.2 Equivalence d'homotopie et type d'homotopie

Définition 1.5. Soient X et Y deux espaces topologiques pointés. Un morphisme d'espaces pointés f appartenant à $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est appelé *équivalence d'homotopie* s'il existe un élément g appartenant $Mor_{Top_*}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ tel que l'on ait

$$[g\circ f]=[Id_X] \text{ et } [f\circ g]=[Id_Y] \quad .$$

On dit alors que g est un *inverse à homotopie près* de f.

Proposition 1.6. *Soient* X, Y, Z *trois espaces topologiques pointés. Alors :*

- *L'identité Id_X est une équivalence d'homotopie entre* X *et lui-même.*
- *S'il existe une équivalence d'homotopie entre* X *et* Y, *il en existe une entre* Y *et* X.
- *S'il existe une équivalence d'homotopie entre* X *et* Y *et entre* Y *et* Z, *alors il en existe une entre* X *et* Z.

Démonstration :

- On peut ici (en reprenant les notations de la définition) prendre $g=Id_X$. On a alors le résultat de manière immédiate.
- Les applications f et g jouent un rôle symétrique, d'où g est une équivalence d'homotopie entre Y et Z.

- Soient f_1 un élément de $Mor_{Top_*}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ définissant une équivalence d'homotopie entre X et Y, et f_2 un élément de $Mor_{Top_*}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ définissant une équivalence d'homotopie entre Y et Z, et soient g_1 et g_2 des inverses à homotopie près de f_1 et f_2 respectivement. Considérons les morphismes :

$$\begin{cases} f = f_2 \circ f_1 \\ g = g_1 \circ g_2 \end{cases}$$

  Alors, comme par hypothèse $\begin{cases} [f_1 o g_1] = [Id_Y] \; et \; [g_1 \circ f_1] = [Id_X] \\ [f_2 o g_2] = [Id_Z] \; et \; [g_2 \circ f_2] = [Id_Y] \end{cases}$ la proposition **??** montre que l'on a les égalités suivantes :

$$[f \circ g] = [f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2] = [f_2] \circ [f_1 o g_1] \circ [g_2] = [f_2] \circ [Id_Y] \circ [g_2] = [f_2 \circ Id_Y \circ g_2] = [f_2 \circ g_2] = [Id_Z]$$

$$\text{et} \qquad [g \circ f] = [g_1 o g_2 o f_2 o f_1] = [Id_X]$$

  qui permettent de conclure que f définit une équivalence d'homotopie entre X et Z.

Remarque : On pourrait penser que l'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces pointés ; cependant les espaces pointés ne forment pas un ensemble, mais une catégorie (voir pour cela le chapitre 3). On se contente donc de poser la définition suivante :

Définition 1.7. S'il existe une équivalence d'homotopie de X dans Y, on dit que X *a type d'homotopie de* Y, ou encore que X et Y ont *le même type d'homotopie.*

Exemples :

- Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie (le fait d'avoir le même type d'homotopie généralise le fait d'être homéomorphe). La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant.
- $\mathrm{X} = ([-1, 1], 0)$, $\mathrm{Y} = (\{0\}, 0)$ et $\mathrm{Z} = (]-1, 1[, 0)$ ont le même type d'homotopie. En effet, en considérant d'abord X et Y, notons

$$f \; : \; \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow \{0\} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$$

$$g \; : \; \begin{cases} \{0\} \longrightarrow [-1, 1] \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases}$$

  Les applications f et g sont bien deux morphismes d'espaces pointés, et l'égalité $f \circ g = Id_Y$ est immédiate. Enfin, considérons l'application

$H\ :\ \begin{cases}[-1,1]\times[0,1]\longrightarrow[-1,1]\\(x,t)\longmapsto tx\end{cases}$. L'application H définit bien une homotopie entre $f\circ g$ et Id_X, donc X et Y ont bien le même type d'homotopie. Par le même raisonnement (avec les mêmes applications), on montre que Y et Z ont le même type d'homotopie, et par "transitivité", on en déduit que X et Z ont également le même type d'homotopie.

- X $= R^2 \setminus \{A=(-1,0)\cup B=(1,0)\}$ et un bouquet de deux cercles ont le même type d'homotopie. Pour montrer celà, considérons le bouquet de cercles B $= (\{(x,y)\epsilon R^2/(x+1)^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\epsilon R^2/(x-1)^2+y^2=1,0\}) = (\mathrm{C}_1\cup\mathrm{C}_2)$ (on peut en considérer un en particulier, puisqu'ils sont tous homéomorphes, et donc de même type d'homotopie). Notons :

$$f\ :\ \begin{cases}X\longrightarrow B\\ C=(x,y)\longmapsto\begin{cases}[AC]\cap C^1 & si\\ x<0\\ [BC]\cap C^2 & si\\ x\geq 0\end{cases}\end{cases}$$

$$g\ :\ B\longrightarrow X$$

où g est tout simplement l'inclusion. Alors f et g sont bien des morphismes d'espaces pointés, et on a $f\circ g = Id_B$ de manière immédiate. Inversement, en remarquant que $g\circ f = f$, considérons

$$H\ :\ \begin{cases}X\times[0,1]\longrightarrow X\\(x,t)\longmapsto tx+(1-t)f(x)\end{cases}$$

H est une homotopie entre $g\circ f$ et Id_X, donc X et B ont bien le même type d'homotopie.

- L'espace X égal à R^3 auquel on retire le point $O=(0,0,0)$ a le même type d'homotopie que la sphère S^2. Notons $f\ :\ \begin{cases}X\longrightarrow S^2\\A\longmapsto[AO]\cap S^2\end{cases}$ et g correspondant à l'inclusion de S^2 dans X. Alors, par un raisonnement analogue à celui utilisé dans l'exemple précédent, on montre que $[f\circ g]=[Id_{S^2}]$ et $[g\circ f]=[Id_X]$.

Théorème 1.8. *Soient* Y *et* Z *deux espaces topologiques pointés, et* $f\ :\ Y\longrightarrow Z$ *appartenant* $Mor_{Top_*}(Y,Z)$*. Pour que* f *soit une équivalence d'homotopie, il est nécéssaire que pour tout espace pointé* X*, les applications (ensemblistes)*

$$f_*\ :\ \begin{cases}[X,Y]\longrightarrow[X,Z]\\ [c]\longmapsto[f\circ c]\end{cases}$$

$$f^* : \begin{cases} [Z,X] \longrightarrow [Y,X] \\ [c] \longmapsto [c \circ f] \end{cases}$$

soient des bijections.

Remarque : Le théorème de Whitehead, objectif de ce travail, est une réciproque ce théorème, sous certaines conditions supplémentaires, relativement peu restrictives.

Démonstration : supposons que f soit une équivalence d'homotopie. Alors, par définition il existe un morphisme d'espaces pointés $g : Z \longrightarrow Y$ tel que $[g \circ f] = [Id_X]$ et $[f \circ g] = [Id_Y]$. Montrons d'abord que f_* est une bijection :

- f_* est injective : soient $[c]$ et $[c']$ appartenant [X,Y], telles que $[f \circ c] = [f \circ c']$. Mais alors $[g \circ f \circ c] = [g \circ f \circ c']$. D'où, en utilisant les hypothèses, $[c] = [c']$.
- f_* est surjective : soit $[c]$ appartenant [X,Z]. Alors $[g \circ c]$ appartient [X,Y] et est un antécédent de $[c]$, car en réutilisant les hypothèses, $[f \circ g \circ c] = [c]$.

Et on montre par le même raisonnement que f^* est également une bijection.

Définition 1.9. Un espace qui a le type d'homotopie de l'espace pointé trivial $\star = (\{x_0\}, x_0)$ constitué d'un seul point est dit *contractile.*

Remarque : Soit X un espace pointé contractile. Alors, pour tout espace pointé Y, les ensembles [X,Y] et [Y,X] sont constitués d'un seul élément.

1.3 Espaces de lacets et suspensions réduites

Soit X un espace pointé. Sur l'espace topologique X $\times [-1,1]$, définissons la relation d'équivalence R suivante :

$$\begin{array}{cc} \forall x, x' \epsilon X & (x,1)R(x',1) \\ \forall x, x' \epsilon X & (x,-1)R(x',-1) \\ \forall t, t' \epsilon [-1,1] & (x_0,t)R(x_0,t') \end{array}$$

L'espace quotient (X $\times [-1,1])/R$, muni de la topologie quotient, est noté $\sum X$. On note encore x_0 la classe d'équivalence de x_0 dans ce quotient.

Définition 1.10. Soit X=(X, x_0) un espace topologique pointé. L'espace pointé $\sum$X=$(\sum X, x_0)$ s'appelle la *suspension réduite* de X.

Exemple : Les espaces $\sum$S^n et S^{n+1} sont homéomorphes. En effet, on peut considérer la sphère S^{n+1} comme l'espace obtenu partir du produit $S^n \times [-1,1]$

dans lequel on identifie chacun des deux sous-espaces $S^n \times \{-1\}$ et $S^n \times \{1\}$ à un point.

Soit X un espace pointé. L'ensemble $Mor_{Top_*}(\mathrm{S}^1, \mathrm{X})$ des lacets sur X basés en x_0 peut être muni d'une topologie, dite compacte-ouverte, de la manière suivante : pour un compact K de S^1 et un ouvert U de X, posons

$$V_{K,U} = \{f \epsilon Mor_{Top_*}(\mathrm{S}^1, \mathrm{X}) / f(K) \subset U\}$$

La topologie compacte-ouverte sur $Mor_{Top_*}(\mathrm{S}^1, \mathrm{X})$ est celle dont les ouverts sont les réunions quelconques d'intersections finies de sous ensembles de la forme $V_{K,U}$, autrement dit les $V_{K,U}$ forment une base d'ouverts pour la topologie compacte-ouverte. [dessin]

Muni de cette topologie, $Mor_{Top_*}(\mathrm{S}^1, \mathrm{X})$ est noté ΩX. Remarquons qu'il existe dans $Mor_{Top_*}(\mathrm{S}^1, \mathrm{X})$ un élément canonique : c'est l'application $f : S^1 \longrightarrow X$ qui a pour image $\{x_0\}$. On le note encore une fois x_0.

Définition 1.11 : Soit X un espace pointé. L'espace pointé $\Omega\mathrm{X} = (\Omega X \ , \ x_0)$ s'appelle *l'espace des lacets* (pointés) sur X.

L'importance de ces deux opérations réside dans le fait que si X et Y sont deux espaces pointés, il existe un opération naturelle, appelée l'*adjonction* :

$$adj \ : \ Mor_{Top_*}(\mathrm{X}, \Omega\mathrm{Y}) \longrightarrow Mor_{Top_*}(\sum \mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

définie de la manère suivante : soit $f \ : \ X \longrightarrow \Omega Y$ un morphisme d'espaces pointés. Cette application associe donc un lacet $f(x)$ sur Y à tout point x de X. Chacun de ces lacets peut être vu comme une application de $[-1, 1]$ dans Y telle que $f(x)(-1) = f(x)(1) = y_0$. Autrement dit, f fournit une application $a(f) \ : \ X \times [-1, 1] \longrightarrow Y$ définie par $a(f)(x, t) = f(x)(t)$ qui vérifie

$$\begin{cases} \forall x \epsilon X & (a(f(x))(x, -1) = y_0 = (a(f(x))(x, 1) \\ \forall t \epsilon [-1, 1] & (a(f(x))(x_0, t) = y_0 \end{cases}$$

L'application $a(f)$ passe donc au quotient par la relation R définie sur $X \times [-1, 1]$ et induit une application $\mathrm{adj}(f) : \sum \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$.

Réciproquement, il existe une aplication adj^{-1} :

$$Mor_{Top_*}(\sum \mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longrightarrow Mor_{Top_*}(\mathrm{X}, \Omega\mathrm{Y})$$

définie comme suit : soit $f : \sum \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ un morphisme d'espaces pointés. Un point de $\sum \mathrm{X}$ est la classe d'équivalence d'un point de $X \times [-1, 1]$. L'application f définit donc une application $a^{-1}(f) \ : \ X \longrightarrow C^0([-1, 1], Y]$, qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \epsilon X & ((a^{-1}(f))(x))(-1) = ((a^{-1}(f))(x))(1) = y_0 \\ \forall t \epsilon [-1, 1] & ((a^{-1}(f))(x_0))(t) = y_0 \end{cases}$$

Pour chaque X, l'application $(a^{-1}(f))(x)\ :\ [-1,1] \longrightarrow Y$ passe donc au quotient pour donner une application d'espaces pointés
$(\mathrm{adj}^{-1}(f))(x) : \mathrm{S}^1 \longrightarrow \Omega\mathrm{Y}$.

Théorème 1.12. *Soient* X *et* Y *des espaces topologiques pointés. Alors les applications*

$$\begin{cases} adj\ :\ Mor_{Top_*}(X, \Omega\, Y) \longrightarrow Mor_{Top_*}(\sum X,\, Y) \\ Mor_{Top_*}(\sum X, Y) \longrightarrow Mor_{Top_*}(X, \Omega\, Y) \end{cases}$$

sont bijectives, car inverses l'une de l'autre, et passent au quotient. On a donc une bijection canonique

$$[\mathrm{X}, \Omega\mathrm{Y}] = [\textstyle\sum \mathrm{X}, \mathrm{Y}]$$

1.4 Les groupes d'homotopie d'un espace pointé

En réutilisant ce qui précède, on pose :

$$\pi_n(\mathrm{X}) = [\mathrm{S}^n, \mathrm{X}] = [\textstyle\sum \mathrm{S}^{n-1}, \mathrm{X}] = [\mathrm{S}^{n-1}, \Omega\mathrm{X}] = ... = [\mathrm{S}^0, \Omega^n X] = \pi_0(\Omega^n\mathrm{X})$$

Rappelons que S^0 est l'espace topologique pointé $(\{\pm1\}, 1)$. Il contient donc uniquement deux points, dont l'un est le point base.

Proposition 1.13. *Soit* X *un espace topologique pointé. L'ensemble* $\pi_0(\mathrm{X})$ *est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes par arcs de* X.

Démonstration : Soit f appartenant $\pi_0(\mathrm{X})$. Alors, comme S^0 ne comporte que deux points distincts, $Im(f)$ comporte, au plus deux points distincts, dont au moins l'un est x_0 (qui correspond $f(1)$). Mais alors deux morphismes f et g sont homotopes si et seulement si $f(-1)$ et $g(-1)$ sont dans une même composante connexe. CQFD

Théorème 1.14. *Soit* X *un espace topologique pointé. La composition de chemins fait de* $\pi_1(\mathrm{X})$ *un groupe. Et, pour tout entier* $n \geq 2$, $\pi_n(\mathrm{X}) = \pi_1(\Omega^{n-1}\mathrm{X})$ *est commutatif.*

Démonstration : Montrons d'abord que $\pi_1(\mathrm{X})$ est un groupe (la composition de chemins est de manière immédiate associative):

- L'élément neutre est le lacet trivial.
- On a vu que la composition ne posait pas problème.
- Idem pour le passage à l'inverse.

Pour la commutativité, il suffit de montrer que $\pi_2(\mathrm{X})$ est commutatif. On peut également voir les morphismes de S^2 dans X comme des applications du carré I^2 dans X qui envoient le bord δI^2 sur le point base x_0. Alors la composée $\Gamma_1\Gamma_2$ de deux morphismes Γ_1 et Γ_2 est $\Gamma_1\Gamma_2 \,:\, (x,y)\epsilon I^2 \longmapsto \begin{cases} \Gamma_1(2x,y) \text{ si } x\epsilon[0,\frac{1}{2}] \\ \Gamma_2(2x-1) \text{ si } x\epsilon[\frac{1}{2},1] \end{cases}$. Alors l'homotopie entre $\Gamma_1\Gamma_2$ et $\Gamma_2\Gamma_1$ est donnée par le dessin ci-dessous :

2 GROUPE DE POINCARE, REVETEMENTS, THEOREME DE VAN KAMPEN ET APPLICATIONS

2.1 Groupe de Poincaré

On a montré dans le chapitre précédent que l'on pouvait définir sur un espace topologique pointé X un groupe $\pi_1(\mathrm{X})$, que nous allons étudier plus en détail.

Définition 2.1. Le groupe $\pi_1(\mathrm{X})$ est appelé *groupe fondamental*, ou *groupe de Poincaré* de X.

On voudrait en fait comparer les espaces topologiques à l'aide de leurs groupes fondamentaux et des groupes fondamentaux de leurs espaces de lacets successifs.

Exemple :
Groupe fondamental du cercle : montrons que $\pi_1(\mathrm{S}^1) = Z$. Pour cela, on s'appuiera sur quelques résultats concernant le relèvement qui ne seront énoncés que plus tard dans le chapitre. Soit c un lacet de S^1. Il admet un unique relevé à R de'origine 0. Son extrémité $\widetilde{c}(1)$ est un élément de R que l'exponentielle complexe envoie sur 1, c'est donc un entier, qu'on appellera degré du lacet c (et qui correspond en fait à l'indice du lacet c par rapport à 0), et qu'on notera $Ind_c(0)$.
Montrons que l'application $Ind_-(0)$ définit un isomorphisme de $\pi_1(\mathrm{S}^1)$ dans Z:

- c'est un morphisme : soient c et d deux lacets de base 1 dans S^1, leur composée cd est l'application $cd(t) = \begin{cases} c(2t) \; si \; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ d(2t-1) \; si \; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$. En notant $\widetilde{c}$ et $\widetilde{d}$ les relèvements d'origine 0 de c et d respectivement, on a $\widetilde{cd}(t) = \begin{cases} \widetilde{c}(2t) \; si \; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \widetilde{c}(1) + \widetilde{d}(2t-1) \; si \; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$, d'où $Ind_{cd}(0) = \widetilde{c}(1) + \widetilde{d}(1) = Ind_c(0) + Ind_d(0)$.
- cette application est injective : R étant simplement connexe, deux lacets c et d sont homotopes si et seulement si ils ont le même indice.
- $Ind_-(0)$ est surjective : pour chaque entier naturel n, il existe bien un lacet d'indice n, par exemple $\gamma_n \; : \; t\epsilon[0,1] \longmapsto exp(2i\pi tn)$.

d'où finalement on a bien le résultat annoncé.

Soient X et Y deux espaces topologiques pointés, et f apartenant à $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Si γ est un lacet dans X (de base x_0), $f \circ \gamma$ est un lacet de base y_0 de Y. La composition $\gamma \longmapsto f \circ \gamma$ est alors compatible avec l'homotopie et la composition de chemin. L'application f induit donc une application $f_* : \pi_1(\mathrm{X}) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Y})$ telle que, pour γ_1 et γ_2 deux lacets de X, $f_*(\gamma_1\gamma_2) = f_*(\gamma_1)f_*(\gamma_2)$. D'où la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques pointés, f appartenant $Mor_{Top_*}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Alors f induit un homomorphisme f_* du groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{X})$ dans $\pi_1(\mathrm{Y})$; et si g est dans $Mor_{Top_*}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

On peut alors dire que la construction du groupe fondamental donne un foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés dans la catgorie des groupes (cette notion sera explicitée au chapitre suivant).

Proposition 2.3. *Soit* X *un espace topologique, C une composante connexe par arcs. Soit x_0 appartenant à C. L'application*

$$i_* : \pi_1(C, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$$

et qui correspond à l'inclusion est un isomorphisme.
Démonstration :

- L'application est de manière évidente un morphisme.
- La surjectivité est immédiate : les lacets de X basés en x_0 sont contenus dans la composante connexe contenant x_0, soit C;
- Injectivité : soit c un lacet, homotope au lacet constant x_0. Notons H l'homotopie entre ces deux lacets. Alors $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ est en fait à valeur dans C. Donc c est homotope au lacet constant dans C.

Remarque : on montre également par là que le choix du point base importe dans la mesure où on peut choisir de le placer dans telle ou telle composante connexe par arcs (il est immédiat que, si x_1 et x_2 sont deux points contenus dans une même composante connexe par arcs, $\pi_1(X, x_1)$ et $\pi_1(X, x_2)$ sont isomorphes).

2.2 Revêtements

Dans ce paragraphe, tous les espaces topologiques considérés seront (sauf mention contraire) séparés et localement connexes par arcs.

Définition 2.4. Soit X un espace topologique. Un *revêtement de* X correspond à la donnée d'un espace topologique E et d'une application continue p ayant la propriété de *trivialité locale* suivante : pour tout point x de X, il existe un voisinage V de x, un espace discret non vide F et un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times F$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) & \longrightarrow & V \times F \\ \searrow & & \nearrow \\ & & \\ & V & \end{array}$$

Concrêtement, si c est une pré-image de x par p, il existe un voisinage W de c tel que W et V soient isomorphes.

On dit que p (ou même E, par abus de langage) est un *revêtement de* X. L'espace X est *la base du revêtement*, l'espace E est l'*espace total*, l'application p est la *projection*, l'ensemble $p^{-1}(x)$ est la *fibre au dessus du point* x *de* X, le voisinage V est un *voisinage distingué de* x, et Φ est une *trivialisation de* p *au dessus de* V.

Remarques : en gardant les notations énoncées plus haut :

- La projection p est surjective (puisque $p^{-1}(x)$ est non vide), donc si E est compact ou connexe par arcs, X l'est également.
- L'espace X étant séparé, l'espace E l'est 'egalement, par l'hypothèse de trivialité locale.
- La fibre est toujours discrète. On généralisera au chapitre 4 la notion de fibre, avec les fibrations, pour avoir des fibres éventuellement continues.

Exemples :

- Le revêtement trivial $p : X \times F \longrightarrow X$, où F est une espace discret.
- L'application exp : $C \longrightarrow C^*$ est un revêtement. L'application exp est holomorphe, donc *a fortiori* continue. Soit z_0 appartenant à C^*. Considérons le voisinage ouvert $V = \left\{ z \epsilon C, \mid z - z_0 \mid < \frac{1}{2} \mid z_0 \mid \right\}$ de z_0. Il existe sur cet ouvert une détermination continue du logarithme, qu'on notera log. Introduisons la fonction Φ : $\begin{cases} exp^{-1}(V) \longrightarrow V \times Z \\ z \longmapsto (exp(z), \frac{log(exp(z)) - z_0}{2i\pi}) \end{cases}$. Cette application est continue, en tant que composée d'applications continues, et admet pour inverse $\begin{cases} V \times Z \longrightarrow exp^{-1}(V) \\ (z, n) \longmapsto log(z) - 2in\pi \end{cases}$, qui est également continue. L'application Φ est donc bien un homéomorphisme.

- Revêtement induit : soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement, et soit Y un sous-espace de X. Alors la restriction de p à $p^{-1}(Y)$ est un revêtement de Y, le *revêtement induit au dessus de Y.*

- Revêtement produit : si $p : E \longrightarrow X$ et $p' : E' \longrightarrow X'$ sont deux revêtements, alors $p \times p' : E \times E \longrightarrow X \times X'$ est un revêtement de $X \times X'$, le *revêtement produit.*

Définition 2.5. Soient E et X deux espaces topologiques, et $p : E \longrightarrow X$ une application continue. Une section de p au dessus d'une partie V de X est une application continue $s : V \longrightarrow E$ telle que, pour tout x appartenant à V, on ait $p(s(x)) = x$ (on a un inverse partiel à droite).

Proposition 2.6. *Soient E et X deux espaces topologiques, et $p : E \longrightarrow X$ une application continue. Pour que p soit un revêtement, il faut et il suffit que, pour tout point x de X, il existe un voisinage V de x et une famille non vide $(s_i)_{i\epsilon I}$ de sections de p au dessus de V telles que :*

- $\forall i\epsilon I,\ s_i(V)$ *est un ouvert de* $p^{-1}(V)$
- $\forall i, j\epsilon I,\ i \neq j,\ s_i(V) \cap s_j(V) = \emptyset$
- $p^{-1}(V) = \bigcup_{i\epsilon I} s_i(V)$

Démonstration : Si V est un voisinage de x, et si $\Phi : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times F$ est une trivialisation de p au dessus de V, les applications $s_f : x \longmapsto \Phi^{-1}(x, f)$, pour tout f appartenant à F, constituent une famille non vide de sections de p au dessus de V vérifiant les propriétés voulues.

Inversement, supposons I muni de la topologie discrète. Introduisons l'application $\Phi : \begin{cases} p^{-1}(V) \longrightarrow V \times I \\ x \longmapsto (p(x), i) \quad si\ x\epsilon s_i(V) \end{cases}$. L'application Φ est bien un homéomorphisme, d'inverse $\Phi^{-1} : (x, i) \longmapsto (p(x), i)$, faisant ainsi commuter le diagramme.

Proposition 2.7. *Soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement. Si X est connexe, toutes les fibres sont de même cardinal.*

Démonstration : Notons :

$$C_n = \left\{x\epsilon X / Card(p^{-1}(x) = n\right\}$$

$$C_\infty = \left\{x\epsilon X / p^{-1}(x) \simeq Z\right\}$$

Ces ensembles sont à la fois fermés et ouverts dans X, qui est connexe, donc sont tous soit vides soit égaux à X. Un au plus est non vide, et ils ne peuvent pas être tous vides. D'où le résultat annoncé.

Définition 2.8. Si ce cardinal est fini et égal à n, on dit que E est un *revêtement à n-feuillets de X.*

Exemple : pour qu'une application $p : E \longrightarrow X$ soit un homéomorphisme de E dans X, l'espace X étant connexe, il faut et il suffit que p soit un revêtement à un feuillet.

Propostion 2.9. *Un revêtement est un homéomorphisme local.*

Démonstration : soient e un élément de E, V un voisinage de $p(e)$ trivialisant le revêtement (on parle de voisinage distingué), et Φ l'homéomorphisme comme dans la définition. Alors, pour tout élément f de F, $e \epsilon U = \Phi^{-1}(V \times \{ f \}$. La section $s : \begin{cases} V \longrightarrow U \\ x \longmapsto \Phi^{-1}(x, f) \end{cases}$ est un inverse de l'application p restreinte à U, qui est donc un homéomorphisme de U sur V.

Théorème 2.10. *Soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement. Considérons un espace Z, une application $f : Z \longrightarrow E$, et une homotopie $\Phi : Z \times [0,1] \longrightarrow X$ telle que $p \circ f = \Phi_{|z \times \{0\}}$. Il existe alors un unique homotopie $F : Z \times [0,1] \longrightarrow E$ telle que*

$$\begin{cases} F_{|z \times \{0\}} = f \\ p \circ F = \Phi \end{cases}$$

Démonstration : montrons d'abord le résultat intermédiaire suivant :

Lemme : soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement, soient x et t des éléments de X et $p^{-1}(x)$ respectivement, et soit $f : [0,1] \longrightarrow X$ un chemin tel que $f(0) = x$. Alors il existe un unique chemin $g : [0,1] \longrightarrow E$ tel que $g(0) = t$ et $p \circ g = f$.

Démonstration du lemme : Notons V un voisinage ouvert de x comme dans la définition de revêtement. En tant qu'image du compact $[0,1]$ par une application continue, tout chemin est compact. Et pout tout point $f(\tau)$ du chemin, il existe un voisnage $U_{f(\tau)}$ de $f(\tau)$ comme dans la définition de revêtement. L'ensemble de ces ouverts formant un recouvrement du chemin, on peut, d'après la propriété de Borel-Lebesgue, extraire de cette famille une sous-famille finie $U_{i, i \epsilon [0,n]}$ d'ouverts (qu'on peut de plus, par commodité, supposer distincts) formant un recouvrement de ce chemin.

Soit un de ces ouverts, contenant x, qu'on renomme U_0. Sa pré-image par p est homéomorphe à une union (discrète) d'ouverts homéomorphes, dont un seul contient le point t. Dans cet ouvert particulier, on considère la pré-image du chemin f. Et c'est bien l'unique manière de construire g. On choisit ensuite un second ouvert, distinct du premier, qu'on renomme U_1, tel que $U_1 \cap U_0 \neq \emptyset$. Considérons un point appartenant à cette intersection, et on continue à partir de ce point la construction de g comme précédement. On poursuit cette opération un nombre fini de fois, puisque la famille d'ouverts l'était. D'où le résultat voulu.

Revenons maintenant au théorème. Soit z un élément de Z. Alors la restriction de Φ à $\{z\} \times [0,1]$ définit un chemin dans X. L'application Φ étant en particulier continue en la seconde variable, ce chemin admet, d'après le lemme, un unique “antécédent” dans E, dont l’origine est fournie par f. Il suffit ensuite de faire farcourir Z à z pour obtenir l’homotopie F, qui est de manière immédiate continue et unique.

2.3 Homomorphisme de revêtements

Définition 2.11. Soient $p : E \longrightarrow X$ et $p' : E' \longrightarrow X'$ deux revêtements. Un *homomorphisme du revêtement* E *dans le revêtement* E' est un couple (H, h) d’aplications continues $\begin{cases} H : E \longrightarrow E' \\ h : X \longrightarrow X' \end{cases}$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{H}{\longrightarrow} & E' \\ p\downarrow & & \downarrow p' \\ X & \overset{h}{\longrightarrow} & X' \end{array}$$

Remarquons que l’application H envoie la fibre $p^{-1}(x)$ dans la fibre $p^{-1}(h(x))$.

Définition 2.12. Soient $p : E \longrightarrow X$ et $p' : E' \longrightarrow X'$ deux revêtements. Un *isomorphisme du revêtement* E *sur le revêtement* E' est un homomorphisme (H, h) de E dans E'pour lequel H et h sont des homéomorphismes. Un *automorphisme* est un homéomorphisme pour lequel $E = E'$, $X = X'$ et $h = Id$. On appelle $Aut(E)$ l’ensemble des automorphismes.

Proposition 2.13. *L’ensemble* $Aut(E)$ *est un groupe qui, muni de la topologie discrète, opère continument sur* E *et, pour tout* x *appartenant à* X*, sur* $p^{-1}(x)$*.*

Démonstration : Il est immédiat que la composition induit sur $Aut(E)$ une loi de composition interne associative, d’élément neutre l’identité, et que chaque élément admet un inverse (puisqu’on a à faire à des homéomorphismes), et donc que $Aut(E)$est un groupe.

Enfin, notons cette opération Θ : $\begin{cases} Aut(E) \times E \longrightarrow E \\ (f, e) \longmapsto f.e \end{cases}$. Soit O un ouvert de E. Alors $\Theta^{-1}(O) = \bigcup_{f \epsilon Aut(E)} \{f\} \times f^{-1}(O)$, qui est bien une réunion d’ouverts , car O est ouvert et $Aut(E)$ est muni de la topologie discrète.

Théorème 2.14. *Soient* $p : E \longrightarrow X$*un revêtement et* $h : X' \longrightarrow X$ *une application continue. Il existe un revêtement* $p' : E' \longrightarrow X'$ *et une application continue* $H : E' \longrightarrow E$ *telle que :*

- (H, h) *est un homomorphisme de revêtement.*
- *Si* $q : D \longrightarrow X'$ *est un revêtement et* $K : D \longrightarrow E$ *un homomorphisme de revêtement au dessus de* h*, alors il existe un unique homomorphisme de revêtement* $L : D \longrightarrow E'$ *tel que* $K = H \circ L$*.*

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "L"] \arrow[drrrr, "K"] \arrow[ddrr, "q"'] & & & & \\
& & E' \arrow[rr, "H"] \arrow[d, "p'"'] & & E \arrow[d, "p"] \\
& & X' \arrow[rr, "h"] & & X
\end{tikzcd}
$$

Remarque : on parle parfois de *revêtement tiré en arrière* de X.

Démonstration : Posons $E' = \{(x', e)\epsilon X' \times E / h(x') = p(x)\}$, et introduisons p' et H les projections

$$p' \,:\, (x', e)\epsilon E' \longmapsto x'\epsilon X'$$

$$H \,:\, (x', e)\epsilon E' \longmapsto e\epsilon E$$

On a donc de manière immédiate $p \circ H = h \circ p'$, ce qui correspond à la partie carrée du diagramme.

D'autre part, p' est un revêtement : en effet, soit x' appartenant à X', notons $h(x') = x\epsilon X$, et soit V un voisinage de x qui trivialise le revêtement p, et Φ une trivialisation. Alors $V' = h^{-1}(V)$ est un ouvert de X' par continuité de h, et

$$X' \times E \supset p'^{-1}(V) = p'^{-1}(h^{-1}(V)) \overset{\Phi'}{\longrightarrow} V' \times F$$

telle que $\Phi' \,:\, (x', e) \longmapsto (x', pr_2\Phi(e))$ nous permet d'obtenir une trivialisation locale de p'. Enfin, soit $q \,:\, D \longrightarrow X'$ un autre revêtement, et K une application telle que (K, h) soit un homomorphisme. Par les hypothèses du second point, l'application $L \,:\, d \longmapsto (q(d), K(d))$ est le seul homomorphisme de D dans E' tel que $K = H \circ L$.

2.4 Relèvement des applications

Soient E, X et X' des espaces topologiques, et $p \,:\, E \longrightarrow X$, $f \,:\, X' \longrightarrow X$ des applications. La question se pose de sovoir sous quelles conditions il est possible de relever l'application f en une application F, de manière à ce que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
X' \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
.
$$

Ceci n'est en effet pas toujours possible.

Définition 2.15. Soit $p \,:\, E \longrightarrow X$ un revêtement, et $f \,:\, X' \longrightarrow X$ une application continue. On appelle *relèvement de f* toute application continue $F \,:\, X' \longrightarrow E$ telle que $p \circ F = f$.

Proposition 2.15. *Soient $p : E \longrightarrow X$ un revêtement, une application continue $f : X' \longrightarrow X$, et $p' : E' \longrightarrow X'$ le revêtement tiré en arrière décrit dans le théorème 2.14., avec $F : E' \longrightarrow E$ l'homomorphisme au dessus de f. L'application qui à une section s de p' associe $F \circ s$ est une bijection de l'ensemble des sections de p' sur l'ensemble des relèvements de h.*

Démonstration : Soit s une section au dessus de p'. Alors

$$p \circ (F \circ s) = (p \circ F) \circ s = (f \circ p') \circ s = f \circ (p' \circ s) = f \qquad ,$$

d'où $F \circ s$ est bien un relèvement de f.
Inversement, soit $F : X' \longrightarrow E$ un relèvement de f, notons $s : x \longmapsto (x, F(x)) \epsilon E'$. Alors s est bien une section de p'.

Remarques : En vertu de ce résultat, on a les corollaires suivants :

- Si $p : E \longrightarrow X$ est un revêtement, et f une application continue d'une espace topologique Y dans X. Si Y est connexe, deux relèvements de f qui coincident en un point sont égaux (sous réserve d'existence). En effet, deux relèvements coincidant en un point correspondent à deux sections du revêtement tiré en arrière, et donc sont égales : en tant que sections, ce sont des applications injectives et ouvertes. L'ensembles des points où elles coincident est donc à la fois un ouvert et un fermé non vide de Y, qui est connexe. CQFD

- Si $p : E \longrightarrow X$ et $p' : E' \longrightarrow X'$ sont deux revêtements, si X' est de plus connexe, et si f est une application continue de X' dans X, alors deux homomorphismes de revêtement au dessus de h qui coincident en un point sont égaux : ce sont en effet des relèvements de $h \circ p'$, et il suffit ensuite l'appliquer la remarque précédente.

Opérons à présent un retour sur les espaces topologiques pointés :

Théorème 2.16. (théorème de relèvement) *Soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement. On suppose de plus que E et X sont des espaces topologiques pointés, de points base respectifs e_0 et x_0, tels que $p(e_0) = x_0$. Soit Y un espace topologique pointé, connexe et localement connexe par arcs, et $f : Y \longrightarrow X$ une application continue telle que $f(y_0) = x_0$.*
Il existe alors un relèvement F de f si et seulement si

$$f_*(\pi_1(Y)) \subset p_*(\pi_1(E)) \qquad .$$

Et ce relèvement est de plus unique.
Démonstration : Considérons le revêtement tiré en arrière $q : D \longrightarrow Y$, et le point (y_0, e_0) de $D \subset X \times E$. Soit C la composante connexe de (y_0, e_0) dans D.

C'est un revêtement connexe par arcs de Y (Y est supposé localement connexe par arcs). Soit c un lacet de base y_0 dans Y. Comme $f_*[c]$ appartient $p_*\pi_1$(E), il existe un lacet γ basé en e_0 dans E tel que $f \circ c$ soit homotope à $p \circ \gamma$ par une homotopie H à valeurs dans Y. Le relevé $\widetilde{H}$ de H à E tel que $\widetilde{H}(0,0) = y$ satisfait

$$t \longmapsto \widetilde{H}(t,0) = \widetilde{f \circ c} \text{ et } t \longmapsto \widetilde{H}(t,1) = \widetilde{p \circ \gamma} = \gamma$$

de sorte que $\widetilde{H}(1,1) = \gamma(1) = e_0$. Ainsi $\widetilde{f \circ c}$ est un lacet γ' qui satisfait $f \circ c = p \circ \gamma'$. Mais alors l'application $t \longmapsto (c(t), \gamma'(t))$ définit un lacet dans $X \times E$ basé en (y_0, e_0), qui est en fait à valeurs dans D et donc dans C. On a donc montré que $q_* : \pi_1(C, (y_0, e_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ est surjective. Et, en tant qu'homomorphisme induit par un revêtement, elle est injective, il s'agit donc d'un isomorphisme.

De plus, les fibres de $C \longrightarrow Y$ sont en bijection avec l'ensemble quotient $q_*\pi_1(C, (y_0, e_0))\pi_1(Y, y_0)$, donc ont un seul élément. Donc q est un homéomorphisme de C sur Y. L'application $F = H \circ (q_{|C})^{-1}$ est le relèvement cherché.

Pour montrer que la condition est nécéssaire, il suffit de remarquer que si $p \circ F = f$, alors $p_* \circ F_* = f_*$, donc l'image de f_* est contenue dans celle de p_*.

L'unicité est immmédiate.

2.5 Revêtement galoisien

Proposition 2.17. *Soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement connnexe. Le groupe $Aut(E)$ opère proprement discontinument sur E.*

Démonstration : Soit e un élément de E, notons $x = p(e)$. Soit V un voisinage de x trivialisant le revêtement, et U un voisinage de E pour lequel la restriction de p à U soit un homéomorphisme de U sur V. Si $g \epsilon Aut(E)$, alors $g.E$ est un des ouverts $V \times \{f\}$, on a donc :

$$g.U \cap U = U \quad \text{ou} \quad g.U \cap U = \emptyset \qquad .$$

Dans le premier cas, on a en particulier $g.e \epsilon U$. Or, e est le seul point de U dont l'image par p soit x, donc $g.e = e$. Et comme l'opération est libre, on a $g = Id$.

Définition 2.18. Un revêtement $p : E \longrightarrow X$ est dit *galoisien*, ou *régulier*, si E est connexe par arcs et si le groupe $Aut(E)$ opère transitivement sur les fibres de E.

Définition 2.19. Un revêtement $p : E \longrightarrow X$ est universel s'il est galoisien et si, pour tout revêtement $p' : E' \longrightarrow X$, il existe un homomorphisme de revêtement h au dessus de X.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Soit maintenant $p : E \longrightarrow X$ un revêtement galoisien, sur lequel le goupe $G = Aut(E)$ opère; et soit F un espace discret sur lequel G opère à gauche. On peut alors faire opérer G sur $E \times F$ par :

$$g.(e, f) = (ge, gf) \quad .$$

Proposition 2.19. Le groupe G opère proprement et librement sur $E \times F$.
Démonstration : L'opération de G sur E est libre, donc reste libre sur $E \times F$.
Soit K un compact de E, et A une partie finie de F (l'espace F étant discret, ses compacts sont les parties finies). Alors

$$g.(K \times A) \cap (K \times A) = (gK \times K) \cap (gA \times A)$$

Considérons l'espace $(E \times F)/G$ des orbites. Soient (e, f) et (e', f') deux points de $(E \times F)$ ayant des orbites distinctes. Si $x = p(e)$ et $x' = p(e')$ sont distincts, il existe des voisinages ouverts distingués V et V' dont l'intersection est vide. Alors $p^{-1}(V) \times Gf$ et $p^{-1}(V') \times Gf'$ sont des voisinages ouverts disjoints et invariants par G des orbites $G.(e, f)$ et $G.(e', f')$. Et si $p(e) = p(e')$, comme E est galoisien, il existe un élément γ de G tel que $e' = \gamma e$, et un voisinage ouvert U de e tel que les restrictions de p à U et γU soient des homoéomorphismes. Alors

$$V = \bigcup_{g \epsilon G} gU \times \{gf\} \quad \text{et} \quad V' = \bigcup_{g \epsilon G} g\gamma U \times \{gf'\}$$

sont des voisinages (ouverts) disjoints et invariants par G des orbites $G.(e, f)$ et $G.(e', f')$. Ce qui justifie la proposition suivante :

Proposition 2.20. *La projecction $\pi_F : E \times F \longrightarrow (E \times F)/G = E_F$ est un revêtement.*

D'autre part, la projection $(e, f) \longmapsto p(e)$ de $E \times F$ sur X est compatible avec l'opération de G sur $E \times F$. Elle détermine alors une application continue p_F telle que le diagramme suivant soit communtatif :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E \\ \pi_F \downarrow & & \downarrow p \\ E_F & \overset{p_F}{\longrightarrow} & X \end{array}$$

Proposition 2.21. *L'application $p_F : E_F \longrightarrow X$ est un revêtement.*
Démonstration : Soient $x \epsilon X$, e un point de $p^{-1}(x)$, V un voisinage distingué connexe de x et s une section de p au dessus de V telle que $s(x) = e$.

Pour tout élément f de F, notons $\sigma_f : \begin{cases} V \longrightarrow E_F \\ y \longmapsto \pi_F(s(y), f) \end{cases}$. Alors l'application σ_f est une section de p_f au dessus de V, d'où, l'application σ_f étant ouverte, l'ensemble $\sigma_f(V)$ est un ouvert de $(p_F)^{-1}(V)$. Et d'autre part, pour

$f \neq f'$, si $\sigma_f(y) = \sigma_{f'}(z)$, alors $y = p_F(\sigma_f(y)) = p_F(\sigma_{f'}(z)) = z$, d'où $\pi_F(s(y), f) = \pi_F(s(y), f')$, d'où $f = f'$, ce que est contradictoire. Donc $\sigma_f(V)$ et $\sigma_f(V)$ sont disjoints.

Enfin, si $\pi_F(y, f) \epsilon p_F^{-1}(V)$, il existe g appartenant à G tel que $g.y \epsilon s(V)$, et alors $\pi_F(y, f) = \sigma_{g.f}(p(y))$, d'où $p_F^{-1}(V) = \bigcup_{f \epsilon F} \sigma_f(V)$.

Donc $p_F : E_F \longrightarrow X$ est bien un revêtement.

Remarque : La fibre de ce revêtement est isomorphe à F.

Définition 2.22. On dit que $p_F : E_F \longrightarrow X$ est le *revêtement de la fibre F associé au revêtement galoisien $p : E \longrightarrow X$.*

Remarque : On aurait pu dans ce paragraphe faire agir G à droite sur E par l'opération $(e, f).g = (g^{-1}.e, f.g)$ pour aboutir finalement aux mêmes résultats.

2.6 Théorème de Van Kampen

Dans ce paragraphe, on considèrera un espace métrique X connexe par arcs, muni de la topologie induite par la métrique, réunion de deux ouverts X_1 et X_2, également connexes par arcs, dont l'intersection X_0 est non vide et connexe par arcs.

Dans le cas où X est un espace topologique pointé, on prendra le point base x_0 dans X_0 (le choix du point base n'aura pas d'incidence par la suite, du moment qu'il se trouve dans X_0, puisque X est connexe par arcs), et on considèrera les X_i comme des espaces topologiques pointés, de point base x_0.

On aura de plus le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\mathrm{X}_1) & \xrightarrow{k_1} & \pi_1(\mathrm{X}) \\
j_1 \uparrow & & \uparrow k_2 \\
\pi_1(\mathrm{X}_0) & \xrightarrow{j_2} & \pi_1(\mathrm{X}_2)
\end{array}$$

où les applications considérées sont les homomorphismes induits par l'injection.

Proposition 2.23. *Le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{X})$ est engendré par les images de k_1 et k_2.*

Démonstration : Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme : Nombre de Lebesgue d'un recouvrement :

Soient X un espace métrique compact, et soit $(U_j)_{j \epsilon Z}$ un recouvrement ouvert de X. Il existe un réel α strictement positif tel que tout sous-espace de X de diamètre inférieur à α soit contenu dans au moins un des ouverts U_j.

Démonstration du lemme : Supposons que, pour tout entier n strictement positif, il existe un boule fermée B_n de centre x_n et de rayon $\frac{1}{n}$ qui ne soit contenue dans aucun des U_j. On a ainsi une suite $(x_n)_{n>0}$, qui a un point d'accumulation x puisque X est compact. S'il existe un entier j tel que x soit contenu dans U_j, alors pour n assez grand, il exite des boules B_n qui soient incluses dans U_j, ce qui est contradictoire. Donc x est un point de X qui n'est contenu dans aucun des U_j qui forment un recouvrement de X, ce qui est absurde.

Soit γ un lacet de base x_0 dans X. Il existe une suite $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = 1$ telle que, pour tout i appartenant à $\{0, n\}$, le chemin γ_i défini par la restriction de γ à $[t_i, t_{i+1}]$ ait son image contenue dans un des deux ouverts $X_{j,j\epsilon\{1,2\}}$, et son origine dans X_0.

Comme X_0 est connexe par arcs, il existe, pour chacune de ces portions, un chemin $\gamma_i^{'}$ joignant x_0 à l'extrémité $\gamma(t_i)$ dans X_0. Et alors :

$$[\gamma] = [\gamma_0]...[\gamma_n] = [\gamma_0][\gamma_1^{'-1}\gamma_1^{'}][\gamma_1]...[\gamma_n^{'-1}\gamma_n^{'}][\gamma_n] = [\gamma_0\gamma_1^{'-1}]...[\gamma_n^{'}\gamma_n]$$

Et chacun de ces lacets est dans l'un des ouverts X_1 ou X_2.

Exemples et applications : L'intérêt de cette propostion réside non pas tant en le fait qu'elle permet de calculer des groupes de Poincaré (elle est même à ce niveau d'une aide pratique parfois limité), mais dans le fait qu'elle permet d'établir simplement des résultats sur la connexité des espaces eux-mêmes.

- Si X_1 et X_2 sont simplement connexes, alors X l'est également : en effet, π_1(X) est engendré par deux groupes triviaux, et est donc le groupe trivial, donc X est simplement connexe.

- Soit n un entier naturel supérieur à 2. La sphère S^n est simplement connexe : on a , en posant $X_1 = S^n\backslash\{(0, ..., 0, 1)\}$ et $X_2 = S^n\backslash\{(0, ..., 0, -1)\}$, deux espaces homéomorphes à R^n, donc simplement connexes, et leur intersection est homéomorphe à $R^n \setminus \{0\}$, qui est connexe par arcs. Il suffit ensuite d'appliquer ce qui précède.

- Soit n un entier naturel supérieur à 3. L'espace $R^n \setminus \{0\}$ est simplement connexe.

- Soit n un entier supérieur à 3. Un ouvert de R^n n'est pas homéomorphe à un ouvert de R^2 (lorsque ces deux espaces sont munis de la topologie usuelle). Pour le montrer, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux ouverts O et P dans R^n et R^2 respectivement qui soient homéomorphes, et soit h un homéomorphisme entre ces ouverts. Soit B une boule ouverte de centre $y = h(x)$ contenue dans P, B' une boule ouverte de centre x contenue dans O, telle que $h(B') \subset B$, et B'' une boule ouverte de centre y contenue dans $h(B')$.
  Soit z appartenant à $B'' \setminus \{y\}$, et notons $i : B'' \longrightarrow h(B')$ et $j : h(B') \longrightarrow B$ les injections. Les ensembles $B'' \setminus \{y\}$ et $B \setminus \{y\}$ ont le même type d'homotopie que le cercle, donc leurs groupes fondamentaux sont isomorphes à Z. Et d'autre part, la composition $(j \circ i)_*$ est un isomorphisme d'après le théorème 1.8. . Mais i_* est trivial, car $h(B') \setminus \{y\}$

est homéomorphe à $R^n \setminus \{0\}$, donc simplement connexe. On a une contradiction.

Théorème 2.24. (Théorème de Van Kampen) : Soit X un espace topologique pointé connexe par arcs, et les sous-espaces $\mathrm{X}_{i,i\epsilon\{0,1,2\}}$ comme décrit plus haut.

Si $h_{i,i\epsilon\{1,2\}}$ est un homomorphisme de $\pi_1(\mathrm{X}_i)$ dans un groupe G, et si $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$, il existe un unique homomorphisme h de $\pi_1(\mathrm{X})$ dans G tel que $h_1 = h \circ k_1$ et $h_2 = h \circ k_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & & G \\
\pi_1(\mathrm{X}_1) \arrow[r, "k_1"] \arrow[urr, "h_1"] & \pi_1(\mathrm{X}) \arrow[ur] & \\
\pi_1(\mathrm{X}_0) \arrow[u, "j_1"] \arrow[r, "j_2"] & \pi_1(\mathrm{X}_2) \arrow[u, "k_2"'] \arrow[uur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration : D'après la proposition 2.23., $\pi_1(\mathrm{X})$ est engendré par les images de k_1 et k_2. Un tel homomorphisme, s'il existe, est donc bien unique. Reste à démontrer son existence.

Le groupe $\pi_1(\mathrm{X}_1)$ (respectivement $\pi_1(\mathrm{X}_2)$) opère sur G par translations à gauche $g \longmapsto h_1(\alpha)g$, pour α appartenant à $\pi_1(\mathrm{X}_1)$. Il existe donc un revêtement $p_1 : E_1 \longrightarrow X_1$ (respectivement $p_2 : E_2 \longrightarrow X_2$) de X_1(respectivement de X_2) et un isomorphisme r de G sur $p_1^{-1}(x_0)$ (respectivement s sur $p_2^{-1}(x_0)$) compatible avec les opérations de $\pi_1(\mathrm{X}_1)$ (respectivement $\pi_1(\mathrm{X}_1)$).

Etant donné que $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$, les revêtements $p_1 : D_1 = p_1^{-1}(X_0) \longrightarrow X_0$ et $p_2 : D_2 = p_2^{-1}(X_0) \longrightarrow X_0$ sont isomorphes, el il existe un isomorphisme $t : D_2 \longrightarrow D_1$ tel que la restriction de t à $p_2^{-1}(x)$ soit égale à $r \circ s^{-1}$.

Soit E l'espace obtenu en recolant E_2 à E_1 au moyen de l'homoéomorphisme t. Les projections p_1 et p_2 déterminent une application continue p de E sur X, et $p : E \longrightarrow X$ est un revêtement. De plus, si q désigne la projection de l'espace $E_1 \cup E_2$ sur E, la restriction de q à E_1 (respectivement à E_2) est un isomorphisme de E_1 (respectivement E_2) sur le revêtement induit p :

$$p^{-1}(X_1) \longrightarrow X_1 \quad \text{(respectivement } p^{-1}(X_2) \longrightarrow X_2 \qquad .$$

Le revêtement $p : E \longrightarrow X$ determine un homomorphisme $\widetilde{h}$ de $\pi_1(\mathrm{X})$ dans le groupe des permutations de $p^{-1}(x)$, et au vu des isomorphismes précédents, on a :

$$\forall \alpha \epsilon \pi_1(\mathrm{X}_1), \;\; \widetilde{h}(k_1(\alpha)) \circ (q \circ r) = (q \circ r) \circ h_1(\alpha)$$

$$\forall \beta \epsilon \pi_1(\mathrm{X}_2), \;\; \widetilde{h}(k_2(\beta)) \circ (q \circ r) = (q \circ r) \circ h_2(\beta)$$

Et donc, si $\pi = q \circ s = q \circ t \circ s = q \circ r$, l'application $\gamma \longmapsto \pi^{-1} \circ \widetilde{h}(\gamma) \circ \pi$ détermine un homomorphisme $\widehat{h}$ de $\pi_1(\mathrm{X})$ dans les groupe des permutations de G tel que

$$\forall \alpha \epsilon \pi_1(\mathrm{X}_1) \text{ et } g \epsilon G, \;\; \widehat{h}(k_1(\alpha))g = h_1(\alpha)g$$

$$\forall \beta \epsilon \pi_1(\mathrm{X}_2) \text{ et } g \epsilon G,\ \ \widehat{h}(k_2(\beta))g = h_2(\beta)g$$

Et comme $\pi_1(\mathrm{X})$ est engendré par les images de h_1 et h_2, pout tout élément γ de $\pi_1(\mathrm{X})$, la permutation $\widehat{h}(\gamma)$ est un homomorphisme de $\pi_1(\mathrm{X})$ dans G, et l'application $\gamma \longmapsto h(\gamma)$ est un homomorphisme de $\pi_1(\mathrm{X})$ dans G tel que $h_1 = h \circ k_1$ et $h_2 = h \circ k_2$, ce qui correspond bien au résultat voulu.

Toujours avec les mêmes notations, on a montré que $\pi_1(\mathrm{X})$ était engendré par $\pi_1(\mathrm{X}_1)$ et $\pi_1(\mathrm{X}_2)$. Il serait intéressant de savoir de quelle manière ces groupes l'engendrent afin de pouvoir calculer des groupes fondamentaux de manière plus pratique. Pour cela, nous allons avoir besoin de quelques résultats sur les groupes libres (sans toutefois entrer dans les détails).

Soit $G_{i,i\epsilon I}$ une collection de groupes. Le produit libre de ces groupes, noté $G = G_{1*}G_{2*}\dots$ est l'ensembles des mots réduits

$$w = x_1x_2\dots x_n$$

où chaque x_j appartient à l'un des G_i. On regroupe les x_i par “paquets” d'éléments consécutifs appartenant à un même G_i pour n'en faire qu'un seul x_i par la loi du groupe G_i. L'élément neutre est le mot vide. On admet que G forme un groupe. Pour chaque i appartenant à I, on note $\pi_i : G_i \longrightarrow G$ le morphisme canonique.

Exemple :

- Le produit libre sur un générateur x est $F_x = \{x^i / i\epsilon Z\}$.
- Le produit libre sur un ensemble S est $F_S = *(F_{x,x\epsilon S})$.

Proposition 2.25. *Soient H un groupes, et, pour tout i appartenant à I, un homomorphisme $\psi_i : G_i \longrightarrow H$. Il existe alors un unique homomorphisme $f : G \longrightarrow H$ tel que, pour tout i appartenant à I, on ait $f \circ \pi_i = \psi_i$.*

Démonstration : Soit $x_1x_2\dots x_n$ un mot réduit. Alors f ne peut être définie que par $f(x_1x_2\dots x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) = \psi_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2)\dots\psi_{i_n}(x_n)$. Et l'application ainsi définie est bien un homomorphisme.

Proposition 2.26. *Soient H un groupe, S un ensemble et $g : S \longrightarrow H$ une application. Alors il existe un unique homomorphisme $f : F_S \longrightarrow H$ tel que la restriction de f à S soit égale à g.*

Démonstration : Soit $x_1x_2\dots x_n$ un mot réduit. Alors f ne peut être définie que par $f(x_1x_2\dots x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) = g(x_1)g(x_2)\dots g(x_n)$, qui est bien un homomorphisme.

Définition 2.27. Soient A, G_1, G_2 des groupes, et $\phi_1 : A \longrightarrow G_1$, $\phi : A \longrightarrow G_2$ deux homomorphismes. On appelle *produit libre avec amalgame* $G_{1*A}G_2$ le groupe $(G_{1*}G_2)/N$, où N est le sous groupe normal engendré par les $\phi_1(a)\phi_2(a)^{-1}$, pour $a\epsilon A$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_1} & G_1 \\ \phi_2 \downarrow & \searrow & \downarrow \\ G_2 & \longrightarrow & G_{1*A}G_2 \end{array}$$

Remarque : Cette notation évacue le rôle joué par le homomorphisme, bien qu'il soit en pratique très important.

Théorème 2.28. (Seifert-Van Kampen) *Les goupes* $\pi_1(\mathrm{X})$ *et* $\pi_1(\mathrm{X}_1)_{*\pi_1(\mathrm{X}_0)}\pi_1(\mathrm{X}_2)$ *sont isomorphes.*

Démonstration : Il s'agit de construire un isomorphisme h entre les deux groupes. Reprenons les notations du théorème de Van Kampen, avec $G = \pi_1(\mathrm{X}_1)_{*\pi_1(\mathrm{X}_0)}\pi_1(\mathrm{X}_2)$, et les applications h_1 et h_2 correspondant à l'inclusion. L'existence de h est assurée par le théorème de Van Kampen, et on a de plus :

$$h_1 = h \circ k_1 \text{ et } h_2 = h \circ k_2$$

Reste à montrer que h est un isomorphisme. Démontrons pour celà le lemme suivant :

Lemme : *Si on a le diagramme commutatif suivant, alors il existe un unique homomorphisme* $\widehat{h} : G_{1*A}G_2 \longrightarrow H$ *tel que le diagramme obtenu en rajoutant les application* π_1 *et* π_2 *et* $\widehat{h}$ *soit commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_1} & G_1 \\ \phi_2 \downarrow & \searrow & \downarrow \\ G_2 & \longrightarrow & H \end{array}$$

Démonstration : Il existe une unique extension en un homomorphisme $G_{1*A}G_2 \longrightarrow H$, et les mots de la forme $\phi_1(a)\phi_2(a)^{-1}$ sont dans son noyau. On a donc bien le résultat voulu.

Mais alors, en appliquant ceci au problème qui nous intéresse, on a un homomorphisme $\widehat{h} : G \longrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$ tel que :

$$\begin{cases} k_1 = \widehat{h} \circ h_1 \\ k_2 = \widehat{h} \circ h_2 \end{cases} .$$

D'où on obtient :

$$\begin{cases} h \circ \widehat{h} \circ h_1 = h_1 \\ h \circ \widehat{h} \circ h_2 = h_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \widehat{h} \circ h \circ k_1 = k_1 \\ \widehat{h} \circ h \circ k_2 = k_2 \end{cases} .$$

Utilisons la seconde paire d'accolades : soit γ un élément de G. Il existe, d'après la proposition 2.23., des éléments α_1, ..., α_n de $\pi_1(\mathrm{X}_1)$ et β_1, ..., β_n de $\pi_1(\mathrm{X}_2)$ tels que $\gamma = \alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n$. Or, pour tout α dans $\pi_1(\mathrm{X}_1)$, $h_1(\alpha) = \alpha$, d'où $h \circ \widehat{h}(\alpha) = \alpha$. Idem pour les éléments de $\pi_1(\mathrm{X}_2)$. Mais alors :

$$h \circ \widehat{h}(\gamma) = h \circ \widehat{h} \circ h_1(\alpha_1) h \circ \widehat{h} \circ h_2(\beta_1) \dots h \circ \widehat{h} \circ h_1(\alpha_n) h \circ \widehat{h} \circ h_2(\beta_n) = \gamma \quad ,$$

d'où $h \circ \widehat{h} = Id$. On montre par un raisonnement analogue que $\widehat{h} \circ h = Id$. CQFD

Exemple : Calcul du groupe fondamental du tore de dimension 2.

On considère le tore de dimension 2, décrit comme dans les exemples précédents. On pose alors X_1 comme étant le disque ouvert de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{4}$, X_2 comme le complémentaire du disque de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{8}$. Leur intersection X_0est bien connexe par arcs, on peut donc applique le théorème de Van Kampen. Or, X_1 a un groupe fondamental trivial, et X_2 a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles, son groupe fondamental est donc isomorphe à Z^2. Et enfin, tout lacet contenu dans X_0est homotope au lacet constant lorsqu'il est vu comme un lacet de X_1 ou X_2. Donc finalement le groupe fondamental du tore est isomorphe à Z^2.

3 CATEGORIES ET FONCTEURS

La proposition 1.6. a fait apparaître certaine limitations de la notion d'ensemble, toute collection d'éléments n'en étant pas forcément un. On s'intéressera donc dans cette partie à des collections d'éléments moins contraignantes .

Remarque : Dans cette partie, on s'intéressera à la notion de catégorie sans expliciter celle d'ensemble.

3.1 Axiomes de la théorie des catégories

Définition 3.1. Un *métagraphe* est constitué d'objets, notés a, b, c, ... et de flèches f, g, h, ... et est munie de deux opérations définies comme suit :

- Le *domaine*, qui à chaque flèche f lui associe son domaine de définition $a = \mathrm{dom} f$
- Le *codomaine*, image de la flèche f, $b = \mathrm{cod} f = f(\mathrm{dom} f)$.

Une métacatégorie est un métagraphe munie de deux autres applications :

- L'*identité*, qui à chaque objet a associe une flèche Id_a (ou encore notée 1_a) $a \longrightarrow a$
- La *composition*, qui à chaque doublet de flèches (g, f) tel que $\mathrm{dom} g = \mathrm{cod} f$ associe la flèche $g \circ f$, appelée leur composée, telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, "g\circ f"] & & c \\ & b \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

De manière à ce que ces deux nouvelles opérations soient associatives et vérifient la loi d'unité : pour toutes flèches $f \ : \ a \longrightarrow b$ et $g \ : \ b \longrightarrow c$, la composition avec 1_b donne :

$$1_b \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ 1_b = g \qquad .$$

Exemple : Les ensembles forment une métacatégorie, dont les flèches sont les applications entre ensembles ayant un domaine et un codomaine précis.

Ainsi, une fonction $f : X \longrightarrow Y$ consisite en un ensemble X (son domaine), un ensemble Y (son codomaine) et une loi $x \longmapsto f(x)$.

Soient X et S deux ensembles. La flèche $s\epsilon S \longmapsto s\epsilon S$ correspond à l'identité sur S. Si de plus S est un sous-ensemble de X, l'application $s\epsilon S \longmapsto s\epsilon X$ correspond à l'inclusion. Toutefois, ces deux fonctions sont différentes, à moins que S soit égal à X.

Remarque : Etant donné que les objets d'une métacatégorie sont en bijection avec les flèches d'identité (ce résultat est imédiat), on peut les identifier à ces dernières et ne raisonner qu'en termes de flèches.

3.2 Catégories

Définition 3.2. Un *graphe* est une classe O d'objets, un ensemble A de flèches et deux fonctions

$$A \overset{\text{dom}}{\longrightarrow} O \quad \text{et} \quad A \overset{\text{codom}}{\longrightarrow} O \quad .$$

Dans ce graphe, considérons l'ensemble des paires composables (ie pour lesquelles la composition a un sens. On notera $\langle f, g\rangle$ les paires composables) :

$$A \times_\circ A = \{\langle g, f\rangle / g, f\epsilon A \text{ et } \mathrm{dom} g = \mathrm{codom} f\}$$

est appelé le *produit sur* O.

Définition 3.3. Une *catégorie* est un graphe muni des deux fonctions supplémentaires :

$$\begin{cases} Id : O \longrightarrow A \\ c \longmapsto Id_c \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \circ : A \times_\circ A \longrightarrow A \\ \langle g, f\rangle \longmapsto g \circ f \end{cases}$$

appelées respectivement *identité* et *composition*, telles que

$$\mathrm{dom}(Id_a) = a = \mathrm{cod}(Id_a) \quad ; \quad \mathrm{dom} g \circ f = \mathrm{dom} f \quad ; \quad \mathrm{cod} g \circ f = \mathrm{cod} g \quad ,$$

ceci pour tous les objets a de O et toutes les paires de $A \times_\circ A$, et telles que l'associativité et la loi d'unité soient vérifiées.

Remarque et notations : On parlera plus généralement d'une catégorie C, les objets de O étant appelés les objets de C, et de même pour les flèches. Et, pour deux objets a et b de C, on notera :

$$Hom(a, b) = Mor_C(a, b) = \{f / f\epsilon C,\ \mathrm{dom} f = a,\ \mathrm{cod} f = b\}$$

On parlera aussi plus généralement de morphismes pour les flèches.

Remarque : avec les notations précédentes, si C est une catégorie, et a, b, c, d des objets, alors, si $(a, b) \neq (c, d)$, alors $Hom(a, b) \cap Hom(c, d) = \emptyset$. En effet, s'il existait un morphisme f dans cette intersection, alors on aurait $a = \mathrm{dom} f = c$ et $b = \mathrm{cod} f = d$, ce qui serait contradictoire ; les domaine et codomaine représentent véritablement les objets de définition et d'arrivé, et non pas des objets pouvant les contenir avec une inclusion stricte.

Exemples :

- La catégorie **Ens** des ensembles , dont les objets sont les ensembles, et les morphismes les applications, munies de la composition usuelle.
- La catégorie **Grp**, dont les objets sont les groupes, et les morphismes les homomorphismes, avec la composition usuelle.
- La catégorie des matrices sur un anneau commutatif A, les objets sont tous les entiers strictement positifs m, n, ... et chaque matrice de taille $m \times n$ est vue comme une flèche $m \longrightarrow n$. La composition est le produit de matrices usuel.
- La catégorie **Top** des espaces topologiques, dont les objets sont les espaces topologiques, et les flèches les applications continues, avec la compsition usuelle.
- La catégorie Top_* des espaces topologiques pointés, où les objets sont les espaces topologiques pointés et les morphismes les morphismes d'espaces pointés comme décrits dans partie 1 .

3.3 Foncteurs

Définition 3.4. Soient C et D deux catégories. Un *foncteur* $F : C \longrightarrow D$ correspond à la donnée :

- d'une application qui, à tout objet a de C associe un objet $F(a)$ de D.
- d'une application qui, à tout morphisme $f : a \longrightarrow b$ de C, associe un morphisme $F(f) : F(a) \longrightarrow F(b)$ de D, tel que pour tout objet a de C, on ait $F(Id_a) = Id_{F(a)}$, et pour tous objets a, b, c de C et tous morphismes $f : a \longrightarrow b$ et $g : b \longrightarrow c$ de C, on ait $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

On dit généralement, qu'un foncteur est un morphisme de catégories.

Proposition 3.5. *La composée de deux fonteurs est un foncteur.*

Proposition 3.6. *On considère la catégorie* $\boldsymbol{Top_*}$. *Alors,* π_1 *est un foncteur de ignoreTop*$_*$ *dans* ***Grp.***

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\mathrm{X}) & \xrightarrow[f_*]{} & \pi_1(\mathrm{Y}) \end{array}$$

Démonstration : cette proposition découle de la proposition 2.2.

Corollaire : *Pour tout entier naturel, π_n est un foncteur.*
Démonstration : Il suffit de considérer le fait que $\pi_n(\mathrm{X}) = \pi_1(\Omega^{n-1}\mathrm{X})$.

Exemples : Considérons :

- $EV\mathcal{F}_k$, la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k donné. Les morphismes sont ici les endomorphismes, et la composition est celle définie usuellement.
- $EQ\mathcal{F}_k$, la catégorie dont les objets sont les k-espaces vectoriels (où k est le même corps que dans $EV\mathcal{F}_k$) de dimension finie munis d'une forme quadratique q non dégénérée et les morphismes sont les applications linéaires φ telles que $\varphi : V \longrightarrow W$, $\forall v \epsilon V$, $q_W(\varphi(v)) = q_V(v)$.
  Ceci nous donne de manière immédiate une application

$$\theta \,:\, EQ\mathcal{F}_k \longrightarrow EV\mathcal{F}_k$$

$$\begin{cases} (V, q_V) \longmapsto V \qquad \text{(surjective)} \\ \varphi \longmapsto \varphi \qquad \text{(non surjective)} \end{cases}$$

On peut également considérer

$$\theta_1 \,:\, EV\mathcal{F}_k \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

$$\begin{cases} V \text{ vu comme un espace vectoriel} \longmapsto V \text{ vu comme un ensemble} \\ \varphi \text{ vu comme un endomorphisme} \longmapsto \varphi \text{ vu comme une application ensembliste} \end{cases}$$

Si de plus k est un corps fini, on peut considérer (en notant $\mathrm{Ens}f$ la catégorie des ensembles finis)

$$\mathbf{Ens}f \longrightarrow EV\mathcal{F}_k$$

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{F}{\longmapsto} & k^E \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) \\ E' & \longmapsto & k^{E'} \end{array}$$

où $F(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ 1 & \vdots & & & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{bmatrix}$ (de manière à ce qu'on ait pas de 1 sur une même ligne). Alors, F est bien un foncteur. Mais alors, pour tous V appartenant à $EV\mathcal{F}_k$ et E appartenant à Ens$f$,

$$Hom_{\text{Ens}f}(E, \theta(V)) \simeq Hom_{EV\mathcal{F}_k}(k^E, V)$$

De même, on peut construire entre $EV\mathcal{F}_k$ et $EQ\mathcal{F}_k$ une fonction F_2 (en notant, pour un espace vectoriel V son espace dual par $V*$):

$$F_2 : V \longmapsto (V \times V*, (v, f) \longmapsto f(v))$$

(la forme quadratique a ici pour forme polaire $b : ((v, f), (v', f')) \longmapsto \frac{1}{2}(f(v') + f'(v)))$ La matrice de la forme quadratique est alors (dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n, e_1^*, ..., e_n^*)$) :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 3.7. Un foncteur $F : C \longrightarrow D$ est dit *plein* lorsque pour toute paire c, c' d'objets de C et pour tout morphisme $g : F(c) \longrightarrow F(c')$ de D, il existe un morphisme $f : c \longrightarrow c'$ de C tel que $g = F(f)$.

Définition 3.8. Un foncteur $F : C \longrightarrow D$ est dit *fidèle* si, pour toute paire c, c' d'objets de C et chaque paire de morphismes $f_1, f_2 : c \longrightarrow c'$, l'égalité $F(f_1) = F(f_2)$implique $f_1 = f_2$.

Remarques :

- La composé de foncteurs pleins (respectivement fidèles) reste fidèle.
- Pour un foncteur pleinement fidèle, on a; en reprenant les notations des définitions, $Hom(c, c') \simeq Hom(F(c), F(c'))$.

3.4 Transformation naturelle, équivalence de catégories

Soient C et D deux catégories, F_1 et F_2 deux foncteurs de C dans D.

Une *transformation naturelle* (ou *morphisme de foncteurs*) $\tau : F_1 \longrightarrow F_2$ correspond à la donnée pour chaque objet c de C d'une application τ_c dans $Hom(F_1(c), F_2(c))$ de manière à ce que pour tout flèche f appartenant à $Hom(c, c')$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} c & & F_1(c) & \overset{\tau_c}{\longrightarrow} & F_2(c) \\ \downarrow f & & F_1(f)\downarrow & & \downarrow F_2(f) \\ c' & & F_1(c') & \longrightarrow & F_2(c') \end{array}$$

Exemple : Le déterminant est une transformation naturelle : en effet, soient A et A' des anneaux commutatifs, et $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme d'anneaux. On a alors de manière naturelle, pour tout entier naturel non nul n fixé :

$$\begin{array}{ccc} GL_n(A) & \overset{det_A}{\longrightarrow} & A^{\times} \\ \phi\downarrow & & \downarrow f \\ GL_n(A') & \longrightarrow & A'^{\times} \end{array}$$

où ϕ est l'application $(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \longmapsto (f(m_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$.

Définition 3.9. Soients F_1et F_2 deux foncteurs comme défini précédement. On appelle *équivalence naturelle* une transformation naturelle $\tau : F_1 \longrightarrow F_2$ telle qu'il existe une transformation naturelle $\tau' : F_2 \longrightarrow F_1$ telle que

$$\tau \circ \tau' = Id_{F_2} \text{ et } \tau' \circ \tau = Id_{F_1}$$

On écrit alors $F_1 \simeq F_2$.

Définition 3.10. Soient C_1et C_2 deux catégories, telles qu'il existe deux foncteurs $F_1 : C_1 \longrightarrow C_2$ et $F_2 : C_2 \longrightarrow C_1$ tels que

$$F_2 \circ F_1 \simeq Id_{C_1} \text{ et } F_1 \circ F_2 \simeq Id_{C_2} \quad .$$

On dit alors que F_1 est une *équivalence de catégories entre C_1 et C_2, ou encore qu'on a équivalence entre les catégories C_1 et C_2.*

Définition 3.11. Un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ est dit *essentiellement surjectif* lorsque, pour tout objet c' de C', il existe un objet c de C tel que c' et $F(c)$ soient isomorphes.

4 GROUPES D'HOMOTOPIE ET FIBRATIONS

On a déjà décrit, dans les chapitres 1 et 2, les groupes $\pi_n(\mathrm{X})$ d'un espace topologique pointé, correspondant à l'ensemble des classes d'homotopie des morphismes (parfois également appelés sphéroides) de S^n dans X. On peut toutefois également voir les morphismes comme des applications envoyant le cube de dimensions n I^n dans X, en envoyant en particulier la frontière ∂I^n sur le point base x_0. Cette vision va nous être utile pour, dans la suite de cette partie, définir les groupes d'homotopie relatifs.

4.1 Groupes d'homotopie et revêtements

Théorème 4.1. *Soient* X *un espace topologique pointé, et* $p : E \longrightarrow X$ *un revêtement tel que, si* E *est vu comme un espace topologique pointé de point base* e_0*, on ait* $p(e_0) = x_0$*. Alors, pour tout entier naturel supérieur ou égal à* 2*, l'application*

$$p_* : \begin{cases} \pi_n(\mathrm{E}) \longrightarrow \pi_n(\mathrm{X}) \\ [c] \longmapsto [p \circ c] \end{cases}$$

est une bijection.

Démonstration : On utilise le lemme suivant :

Lemme : *Soient* $p : E \longrightarrow X$ *un revêtement,* Y *un espace topologique pointé simplement connexe et* $f : Y \longrightarrow X$ *une application continue telle que l'on ait* $p(e_0) = f(y_0) = x_0$*. Il existe alors une unique application* $F : Y \longrightarrow E$ *telle que* $F(y_0) = e_0$ *et* $p \circ F = f$*.*

Démonstration du lemme : Ce lemme découle de manière immédiate du théorème de relèvement. En effet, si Y est simplement connexe, alors $\pi_1(\mathrm{Y}) = \star$, et donc on a de manière évidente $f_*(\pi_1(\mathrm{X})) \subset p_*(\pi_1(\mathrm{E}))$.

Comme la sphère S^nest, pour un entier n supéieur ou égal à 2, simplement connexe, l'homotopie $h : S^n \times I \longrightarrow E$ admet un unique relèvement $H : S^n \times I \longrightarrow E$, qui correspond à une homotopie entre la restriction de H à $S^n \times \{0\}$ et la restriction de H à $S^n \times \{1\}$, ces deux morphismes étant des relèvements des restrictions de h à $S^n \times \{0\}$ et $S^n \times \{1\}$ respectivement. Donc, des relèvements de morphismes homotopes sont homotopes. Donc p_* est injective. Et la surjectivité ne fait pas de doute.

Exemple :

Le groupe fondamental $\pi_n(\mathrm{S}^1)$ est égal au groupe trivial pour $n \geq 2$. En effet, l'application $p : \begin{cases} R \longrightarrow S^1 \\ x \longmapsto e^{2i\pi x} \end{cases}$ est un revêtement. Et comme R est contractile, on a $\pi_n(R) = \star$. Donc, $\pi_n(\mathrm{S}^1) = \star$.

4.2 Fibration

On a décrit dans le chapitre 2 les revêtements, qui sont construits au niveau local comme le produit direct d'un ouvert et d'un ensemble discret. C'est un cas particulier d'une notion plus générale, la fibration.

Définition 4.2. Soient E, F, X des espaces topologiques, et $p : E \longrightarrow X$ une application. On appelle *fibration* (localement triviale) le quadruplet (E, X, F, p) tel que :

Pour tout élément x de X, il existe un voisinage U de x et un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

On appelle p la *projection*, les espaces F, X et E la *fibre*, la *base* et l'*espace total*.

Une fibration est dite *triviale* si E et $E \times F$ sont homéomorphes.

Exemples :

- Les revêtements sont des fibrations dont la fibre est discrète
- Notons E le ruban de Moebius égal à $I \times I$ muni de le relation d'équivalence

$$\forall x \epsilon I,\ (0, x) R (0, 1 - x) \quad .$$

Si X est le cercle $I \times \{0\}$ où sont identifiés les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ (qu'on peut donc inclure dans E) et $F = \left\{(x, y) \epsilon E / x = \frac{1}{2}\right\}$, et p la projection sur X parrallèlement à F, alors (E, X, F, p) est une fibration.

4.3 Groupes d'homotopie relatifs

Soient (X, x_0) un espace topologique pointé, et A un sous-espace de X, muni de la topologie induite, et contenant le point base x_0 (on parlera, lorsqu'on est dans cette situation, de paire d'espaces topologiques (X,A)).

Définition 4.3. Considérons une paire d'espaces topologiques (X,A) et le cube de dimension n I^n. On appelle *morphisme relatif* (de dimension n) *de la paire (X,A)* toute application continue $f : I^n \longrightarrow X$ telle que :

$$\begin{cases} f(I^{n-1} \times \{0\}) \subset A \\ f(\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{0\})) = \{x_0\} \end{cases} .$$

De même que pour les morphismes d'espaces pointés, deux morphismes relatifs f , g : $I^n \longrightarrow X$ sont homotopes s'il existe un application continue $H : I^n \times I \longrightarrow X$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \epsilon I^n,\ H(x,0) = f(x) \ \text{ et } H(x,1) = g(x) \\ \forall t \epsilon I,\ H(\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{0\})) = \{x_0\} \text{ et } H(I^{n-1} \times \{0\}) \subset A \end{cases}.$$

Remarques :

- Pour $A = \{x_0\}$, on retrouve les groupes d'homotopie classiques.
- La relation d'homotopie entre morphismes relatifs est une relation d'équivalence (la démonstration est grosso-modo la même que pour les morphismes d'espaces pointés).

Définition 4.4. Soient f, g : $I^n \longrightarrow X$, pour n supérieur ou égal à 2, deux morphismes relatifs de la paire (X,A). a composée $fg : I^n = I \times I^{n-1} \longrightarrow X$ est le morphisme relatif défini par :

$$fg : \begin{cases} f(2t,x) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1,x) \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Remarque :

- La composition de morphismes relatifs n'est pas définie si n est égal à 1 ou 0.
- Si A est connexe par arcs, l'ensemble des classes d'homotopie est indépendant du choix du point base dans A.

Proposition 4.5. *Soient n un entier relatif supérieur à* 2, *et* (X,A) *une paire d'espaces topologiques. La composition de morphismes relatifs est invariante par homotopie, et muni l'ensemble des classes d'équivalence des morphismes relatifs de dimension n de la paire* (X,A) (*noté* $\pi_n(\mathrm{X},\mathrm{A})$) *d'une structure de groupe.*

Démonstration :

- Soient f, f', g, g' : $I^n \longrightarrow X$ des morphismes relatifs tels que $f \sim f'$ et $g \sim g'$. Notons H_1 et H_2 des homotopies entre ces applications. Considérons l'application $\widetilde{H} : I^n \times I \longrightarrow X$ définie par :

$$\forall x \epsilon X,\ \widetilde{H}(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x,2t-1) \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

  Alors cette application définit bien une homotopie entre fg et $f'g'$.

- Montrons que la loi induite sur $\pi_n(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ par la composition est associative : soient f_1, f_2, f_3 des morphismes relatifs de (X,A). Montrons que les morphismes relatifs $(f_1 f_2) f_3$ et $f_1(f_2 f_3)$ sont homotopes : on considère I^n comme étant égal à $I^{n-1} \times I$, et par la construction de $(f_1 f_2) f_3$, on a en fait $([0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]) \times I^{n-1}$ qui est homéomorphe à $([0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]) \times I^{n-1}$, qui correspond àla construction de $f_1(f_2 f_3)$.

- L'élément neutre est le morphisme relatif (qu'on notera par abus x_0) $x \longmapsto x_0$ (Il est clair que, pour tout morphisme relatif f, les morphismes $f x_0$, f et $x_0 f$ sont homotopes).

- La composée de morphismes relatifs reste bien un morphisme relatif.

- Soit $f : I^n \longrightarrow X$ un morphisme relatif. Alors le morphisme relatif $g : x = (x_1, \ldots x_n) \longmapsto f(-x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ est bien tel que $fg \sim gf \sim x_0$.

Soient (X,A) et (Y,B) deux paires d'espaces topologiques pointés, et $f : (\mathrm{X}, \mathrm{A}) \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{B})$ telle que $f(x_0) = y_0$ et $f(A) \subset B$. Cette application induit un homomorphisme f_* défini par :

$$\begin{cases} \pi_n(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \longrightarrow \pi_n(\mathrm{Y}, \mathrm{B}) \\ [c] \longmapsto [f \circ c] \end{cases} .$$

Définition 4.6. Soit $f : I^n \longrightarrow X$ un morphisme relatif de (X,A), dont on note α la classe dans $\pi_n(\mathrm{X}, \mathrm{A})$. Considérons la restriction de f à la face $I^{n-1} \times \{0\}$. Alors, cette restriction est à valeurs dans A, et telle que, par continuité de f, la frontière $\partial(I^{n-1} \times \{0\})$ est envoyée sur x_0. On note cette application ∂f, et il s'agit d'un morphisme de A.

Proposition 4.7. *L'application ∂ est un homomorphisme de morphismes relatifs* (X,A), *et donc induit un homomorphisme sur le groupe* $\pi_n(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ *(pour $n \geq 2$).*

Démonstration : Soient f, $g : I^n \longrightarrow X$ deux morphismes relatifs de (X,A). Montrons que $\partial(fg) = \partial f \partial g$.

En effet, on a $\partial(fg)$: $\begin{cases} I \times I^{n-2} \times \{0\} \longrightarrow A \\ (t, x, 0) \longmapsto \begin{cases} f(2t, x, 0) \text{ si } t\epsilon[0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1, x, 0) \text{ si } t\epsilon[\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{cases}$ et ∂f : $\begin{cases} I^{n-1} \times \{0\} \longrightarrow A \\ x \longmapsto f(x, 0) \end{cases}$ et ∂g : $\begin{cases} I^{n-1} \times \{0\} \longrightarrow A \\ x \longmapsto g(x, 0) \end{cases}$, d'où

$$\partial f \partial g : \begin{cases} I \times I^{n-2} \times \{0\} \longrightarrow A \\ (t, x, 0) \longmapsto \begin{cases} \partial f(2t, x) = f(2t, x, 0) \text{ si } t\epsilon[0, \frac{1}{2}] \\ \partial g(2t-1) = g(2t-1, x, 0) \text{ si } t\epsilon[\frac{1}{2}, 2] \end{cases} \end{cases}$$

. On a donc bien l'égalité voulue.

Notons i_*et j_* les homomorphismes de $\pi_n(\mathrm{X},\mathrm{A})$ induits par l'inclusion des morphismes et morphismes relatifs $i : \mathrm{A} \hookrightarrow \mathrm{X}$ et $j : (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$. On peut alors construire la suite suivante :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(\mathrm{A}) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\mathrm{X}) \xrightarrow{j_*} \pi_n(\mathrm{X{,}A}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(\mathrm{A}) \xrightarrow{i_*} \cdots \pi_1(\mathrm{X}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathrm{X{,}A})$$

Proposition 4.8. *Cette suite, appelée suite d'homotopie d'une paire d'espaces topologiques, est exacte, ie :*

- $Im\partial = Ker(i_*)$
- $Im(i_*) = Ker(j_*)$
- $Im(j_*) = Ker\partial$

Remarque : L'ensemble des classes d'homotopie $\pi_1(\mathrm{X},\mathrm{A})$ n'est pas un groupe, il faut ici entendre le noyau au sens de la pré-image de la classe représentée par le morphisme relatif $f : \mathrm{S}^1 \longrightarrow x_0$.

Démonstration :

- $\pi_n(\mathrm{A}) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\mathrm{X}) \xrightarrow{j_*} \pi_n(\mathrm{X{,}A})$
  Soit y appartenant à $\pi_n(\mathrm{A})$. Notons $x = i_*(y)$. Montrons que $j_*(x) = x_0$. On peut voir le diagramme précédent de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(\mathrm{A{,}X}) & \longrightarrow & \pi_n(\mathrm{A{,}A}) & \longrightarrow & \pi_n(\mathrm{X{,}A}) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \pi_n(\mathrm{X}) & & \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif (un morphisme de A est bien un morphimse relatif de (A,A)). Mais, en notant D^n le disque de dimension n, on a $\pi_n(\mathrm{A},\mathrm{A}) = [\mathrm{D}^n, \mathrm{A}] = \star$, d'où $j_*(x) = x_0$, et donc $Ker(j_*) \subset Im(i_*)$.

Reste à montrer qu'on a bien une égalité : soit σ_f un élément de $Ker(j_*)$, représentant le morphisme f. Montrons que σ_f admet un antécédent dans $\pi_n(\mathrm{A})$ par i_*.

Dans (X,A), $f : I^n \longrightarrow X$ est homotope à x_0, il existe donc une homotopie $H : I^n \times I \longrightarrow X$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \epsilon I^n,\ H(x,0) = f(x) \ \text{ et } H(x,1) = x_0 \\ \forall t \epsilon I,\ H(\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{0\})) = \{x_0\} \ \text{et } H(I^{n-1} \times \{0\}) \subset A \end{cases}.$$

Notons $\widetilde{H}$ la restriction de H à $I^{n-1} \times \{1\} \times I$. Alors $\widetilde{H}$ est un morphisme de A. Et $\widetilde{H}$ et f sont homotopes : il suffit en efet de considérer l'homotopie

$$H' : \begin{cases} I^n \times I \longrightarrow X \\ (x = (y,z) \epsilon I^{n-1} \times I, t) \longmapsto H(y, z^{1-t}, zt) \end{cases}.$$

L'application H' est bien continue, et on a $H'(x,1) = H(y,1,z) = \widetilde{H}(x)$ et $H'(x,0) = H(y,z,0) = f(x)$; et les conditions aux bords sont bien respectées. Donc $\widetilde{H}$ est un antécédent de f, et on a bien $Ker(j_*) = Im(i_*)$.

- $\pi_n(\text{X}) \xrightarrow{j_*} \pi_n(\text{X,A}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(\text{A})$
  Soit σ_f appartenant à $\pi_n(\text{X})$, classe du morphisme f. On peut voir ce représentant f comme un morphisme relatif de (X,A) qui envoie toute le frontière ∂I^n de I^nsur x_0. Mais alors ∂f est le morphime constant d'où $\partial \circ j_*(f) = x_0$. On a donc bien $Im(j_*) \subset Ker\partial$.
  Reste à montrer l'autre inclusion : soit σ_f un élément de $\pi_n(\text{X, A})$, représentant un morphimse relatif f dont la restriction à $I^{n-1} \times \{0\}$ est le morphisme constant. Il existe alors une homotopie $H : I^{n-1} \times I \longrightarrow A$ telle que, pour tout x appartenant à I^{n-1}, on ait $H(x,1) = f(x)$ et $H(x,0) = x_0$. Mais on peut égalemnt voir H comme une application continue de I^n dans A (qui n'est toutefois pas *a priori* un morphisme). Notons alors

  $$\Psi : \begin{cases} I \times I^{n-1} \simeq I^n \longrightarrow X \\ (x,t) \longmapsto \begin{cases} H(x,2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(x, 2t-1) \text{ sinon} \end{cases} \end{cases} .$$

  Alors Ψ est continue, et $\Psi(\partial I^n) = x_0$. C'est donc un morphisme. Notons σ_Ψ sa classe dans $\pi_n(\text{X})$, et notons

  $$\widetilde{H} : \begin{cases} I \times I^{n-1} \times I \longrightarrow X \\ (t,x,s) \longmapsto \Psi(\frac{1}{2}(3s - st + t), x) \end{cases} .$$

  Alors $\widetilde{H}$ est bien une homotopie entre Ψ et f, d'où $\sigma_f = j_*(\sigma_\Psi)$, et donc $Im(j_*) = Ker\partial$.

- $\pi_{n+1}(\text{X,A}) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\text{A}) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\text{X})$
  Soit σ_f appartenant à $\pi_{n+1}(\text{X, A})$, représentant du morphisme relatif f. Considérons ∂f comme un morphisme de I^n dans X, et notons $H : I^n \times I \longrightarrow X$ l'homotopie définie par :

  $$H : (x,t) \longmapsto f(x,t) \quad .$$

  Alors H est continue, et pour tout élément x de I^n, on a $H(x,0) = \partial f(x)$ et $H(x,1) = f(x,1) = x_0$. Donc H définit une homotopie entre $\partial f = i_* \circ \partial f$ et le morphisme constant. On a donc $Im\partial \subset Ker(i_*)$.
  Inversement, soit σ_f appartenant à $Ker(i_*)$. Alors la fonction $F : I^n \times I \longrightarrow X$ définie par $F(x,t) = f(x)$ est un morphisme relatif de (X,A), tel que $\sigma_F = \sigma_f$. La suite est donc bien exacte.

Supposons maintenant que (X,A) et (Y,B) soient deux paires d'espaces topologiques pointés, et f un morphisme entre ces deux paires. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \pi_n(\mathrm{A}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(\mathrm{X}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(\mathrm{X,A}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(\mathrm{A}) & \xrightarrow{i_*} & \cdots \\
 & \downarrow h_* & & \downarrow h_* & & \downarrow h_* & & \downarrow h_* & & \\
\cdots & \pi_n(\mathrm{B}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(\mathrm{Y}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(\mathrm{Y,B}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(\mathrm{B}) & \xrightarrow{i_*} & \cdots
\end{array}
$$

5 THEOREME DE WHITEHEAD

Dans cette partie, on s'intéresse à la réciproque du théorème 1.8. . Toutefois, elle ne peut s'appliquer que dans des espaces topologiques particuliers, les CW-complexes, que nous allons d'abord décrire.

5.1 CW-complexes

Définition 5.1. Un *CW-complexe* est un espace topologique représenté par une union disjointe $K = \bigcup\limits_{q=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{i \epsilon I_q} e_i^q$ d'ensembles e_i^q, les *cellules*, telle qu'il existe une famille d'applications continues $f_i^q : B^q \longrightarrow K$ (où B^q est la boule unité fermée de dimension q) telles que la restriction de f_i^q à l'intérieur B^q de la boule B^q induise un homéomorphisme entre B^q et e_i^q, et telle que, lorsque q est strictement positif, on ait $f_i^q(S^{q-1}) \subset \bigcup\limits_{p=0}^{q-1} \bigcup\limits_{i \epsilon I_p} e_i^p$. On demande de plus que les conditions suivantes soient satisfaites :

- Soit e_i^q une cellule. Alors $\overline{e_i^q}$ ne rencontre qu'un nombre fini de cellules (axiome (C), ou de "fermeture finie").
- Un sous ensemble F inclus dans K est fermé si et seulement si, pour chaque cellule e_i^q, le pré-image $(f_i^q)^{-1}(F)$ est un fermé de B^q, autrement dit, l'intersection de F avec chaque cellule e_i^q doit être un fermé de e_i^q (munie de la topologie induite) (axiome (W), ou de "topologie faible").

Remarque :
Il peut être plus pratique de se représenter les CW-complexes à l'aide de leur mode de construction : soir $K^{(0)}$ un ensemble discret de points, les cellule de dimension 0. Supposons que $K^{(n-1)}$ait été construit. Soit alors $\{f_{\partial i}\}_{i \epsilon I}$ une famille d'applications continues de S^{n-1} dans $K^{(n-1)}$. Notons $Y = \bigcup\limits_{i \epsilon I} B_i^n$ l'union disjointe des boules unité de dimension n, et B l'union des frontières S_i^{n-1} de ces boules. On peut alors, à l'aide des applications $f_{\partial i}$, définir une application $f : B \longrightarrow K^{(n-1)}$. Et on note alors

$$K^{(n)} = K^{(n-1)} \cup_f Y$$

Définitions 5.2.
Un CW-complexe K est dit *fini* lorsqu'il ne comprte qu'un nombre fini de cellules.

Les cellules e_i^q sont les *cellules de dimension* q. L'ensemble $K^{(q)}$ des cellules de dimension inférieure ou égale à q est le *squelette de dimension* q de K.

Un CW-complexe est *localement fini* si chaque point admet un voisinage inclus dans un nombre fini de cellules.

Un *sous-complexe* L d'un CW-complexe K est un CW-complexe inclus dans K dont les cellules peuvent être vues comme des cellules de K.

Remarques :

- Soient K et K' deux CW-complexes. Alors $K \times K'$ est un CW-complexe dont les cellules sont les $e_i^p \times e_j^{p\prime}$.
- Soit K un CW-complexe. Alors, pour tout entier naturel n, son squelette $K^{(n)}$ de dimension n est de manière immédiate un sous-complexe. De même pour chaque cellule.
- Une fonction d'un CW-complexe K dans un espace topologique X est continue si et seulement si elle est continue sur chaque sous-complexe fini de K : le nécéssité est évidente. Inversement , soit x un point de K. Alors x est contenu dans une des cellules e_i^q, qui est un sous-complexe fini de K, donc sur lequel, par hypothèse, f est continue. Donc f est continue en x.

Exemples :

- La sphère S^n : on peut en effet la voir comme l'union $e^0 \cup e^n$ d'un point x_0 et de son complémentaire $e^n = S^n \setminus \{e^0\}$. L'application caractéristique $f^n : B^n \longrightarrow S^n$ envoie ∂B^n dans e^0 et est un homémorphisme entre B^n et e^n.
- Le tore T peut également être vu comme un CW-complexe : on considère $I \times I$ muni de la relation d'équivalence R suivante : pour tout x appartenant à I, on a $(x,0)R(x,1)$ et $(0,x)R(1,x)$.
  Notons e^0 un point du tore (de coordonnées (x,y)), la cellule e_1^1 égale à la droite $I \times \{y\}$ où on identifie les points $(1,y)$ et $(0,y)$, incluse dans le tore et privée du point (x,y) ; et sur le même modèle e_2^1 correspondant à la droite $\{x\} \times I$ où on identifie $(x,0)$ et $(x,1)$, et qu'on prive de (x,y). Enfin, e^2 est le complémentaire de $e^0 \cup e_2^1 \cup e_2^1$ dans T.
  Alors f^0 est l'application qui au seul point de B^0 associe le point e^0; l'application f_1^1 envoie ∂B^1 sur e^0 et est un homéomorphisme entre B^1 et e_1^1 (ces deux ensembles sont bien homéomorphes, il suffit par exemple de considérer l'application $f_1^1 : t\epsilon]0,1[\longmapsto (x+t,y))$, l'application f_2^1 est construite de la même manière, et f^2 envoie ∂I^2 sur $e^0 \cup e_2^1 \cup e_2^1$ et à (s,t) dans I^2 associe $(x+s, y+t)$.

Définition 5.3. Une *paire de Borsuk* est une paire d'espaces topologiques (X,A) telle que, pour tout espace topologique Y et toute application $h : X \longrightarrow$

Y, si $H : A \times I \longrightarrow Y$ est une homotopie telle que pour tout élément x de A, on ait $H(x, 0) = h(x)$, alors H peut être prolongée en une homotopie $H' : X \times I \longrightarrow Y$ telle que, pout tout élément x de X, on ait $H'(x, 0) = h(x)$.

Théorème 5.4. (Théorème de Borsuk) *Toute paire d'espaces topologiques (K, L) où K est un CW-complexes et L un sous-complexe est une paire de Borsuk.*

Démonstration : Considérons la paire d'espaces topologiques $(K \times I, L \times I)$, et X un espace topologique quelconque. Soit $H : L \times I \longrightarrow X$ et $h : K \times \{0\} \longrightarrow X$ telle que $h_{|L \times \{0\}} = H_{|L \times \{0\}}$.

Construisons l'extension de H en raisonnant par récurrence sur la dimension des cellules.

- Considérons le squelette de dimension 0. Pour toute cellule e_i^0 de dimension 0, on pose

$$H'(x, t) = \begin{cases} H(x, t) \text{ si } x = e_i^0 \epsilon L \\ h(x, 0) \text{ sinon} \end{cases} \qquad .$$

- supposons que l'extension ait été construite sur $K^{(n)} \times I$. Soit e^{n+1} une cellule de dimension $n+1$ qui ne soit pas dans L (s'il n'existe pas une telle cellule, alors H' est déjà définie sur $K^{(n+1)} \times I$, et on peut passer à la dimension supérieure. S'il n'existe plus aucune cellule qui ne soit pas dans L, alors le travail est terminé).
  Alors H est déjà définie sur $(\overline{e^{n+1}} \setminus e^{n+1}) \times I$: en effet, la frontière de e^{n+1} correspond à $f^{n+1}(\partial B^{n+1})$ (où f^{n+1} est l'application caractéristique) et est incluse dans des cellules de dimension strictement inférieure d'après l'axiome de fermeture finie, donc dans $K^{(n)}$.
  Resta à prolonger H à l'intérieur du cylindre $f^{n+1}(B^{n+1}) \times I$. Considérons un point a qui soit en dehors de $B^{n+1} \times I$ et sur $B^{n+1} \times \{1\}$ (considéré comme inclus dans l'espace euclidien de dimension $n+1$). L'application $\eta : B^{n+1} \times I \longrightarrow (\partial B^{n+1} \times I) \cup (B^{n+1} \times \{0\})$ qui, à tout point x appartenant au cylindre et tout t dans I, associe, en notant $p(x)$ le projeté de x sur $\partial B^{n+1} \times I$, le point $(1-t)x + tp(x)$, permet de définir H' en composant f^{n+1} et η. Et, étant donné que les cellules sont distinctes, on peut effectuer la même construction sur toutes les autres cellules sur lesquelles H n'est pas définie.

Définiton 5.5. Soient K et L des CW-complexes. Une application $f : K \longrightarrow L$ est dite *cellulaire* si, pour tout n appartenant à N, $f(K^{(n)}) \subset L^{(n)}$.

Définition 5.6. Soit K un CW-complexe. On dit que c'est un *complexe simplicial* si en envoyant les simplexes Δ^q de dimension q dans les boules de dimension q via un homéomorphisme approprié, on a :

- Les applications $f_i^q : \Delta^q \longrightarrow K$ sont des homéomorphismes de Δ^q dans $\overline{e_i^q}$.
- Pour toute face Δ^r de Δ^q, l'ensemble $f_i^q(\Delta^r)$ est égal à la fermeture d'une des cellules de K, et la restriction de f_i^q à Δ^r est égale à l'application caractéristique de cette cellule.

Définition 5.7. Une application entre deux complexes simpliciaux K et L est dite *simpliciale* si elle est continue et envoie "linéairement" les simplexes de K sur les simplexes de L.

Théorème 5.8. *Soit $f : K \longrightarrow L$ une application continue entre deux complexes simpliciaux finis. Il exite alors un refinement K' de K et une application $f' : K' \longrightarrow L$ telle que f' est simpliciale et homotope à f.*

Démonstration : Les espaces K et L sont en particulier des CW-complexes finis, donc inclus dans un espace euclidien. Soit σ un simplex de L. Notons L' la première division barycentrique de L, obtenue comme suit par récurrence : supposons le squelette de dimension $n-1$ déjà divisé. On considère le squelette de dimension q de L, on définit le centre de chaque simplexe de dimension q, qu'on divise alors en simplexes de dimension q ayant pour sommet le centre de simplexe et pour base les simplexes de la division barycentrique de la frontière.

Soit v un vertexe. Si v n'appartient pas à σ, alors pour tout simplexe x_v de la première dividion barycentrique de v, on a :

$$d(\sigma, x_v) > 0$$

Comme L est fini, on a :

$$\min_{v \notin \sigma}(\sigma, x_v) = a > 0$$

Etant donné que f est continue, donc uniformément continue sur les compacts, en particulier sur les simplexes, il existe une subdivision K' de K telle que, pour tout simplexe σ' de K', on ait $diam(f(\sigma')) < a$.

Soit w' un vertexe de K'. Définissons $f'(w')$ comme suit : on choisit un des vertexes pour lequel $f(w')$ soit inclus dans x_v. Et on étend ensuite f' par "linéarité" en application simpliciale.

Montrons que f et f' sont homotopes. Si $f(x)$ apppartient à σ, alors $f'(x)$ appartient également à σ, sinon il existerait un vertex de K', appartenant à un simplexe contenant x, dont l'image par f appartient à une division barycentrique non incluse dans σ, ce qui est impossible.

On peut alors définir $H : \begin{cases} K \times I \longrightarrow L \\ (x,t) \longmapsto f(x) - (f(x) - f'(x))t \end{cases}$ qui définit bien une homotopie entre f et f'.

Théorème 5.9. (théorème d'approximation cellulaire) *Soient K et L deux CW-complexes, et f une application continue allant de K dans L. S'il* *existe un sous-complexe K_1 inclus dans K tel que la restriction de f à K soit cellulaire, alors il existe une application $g : K \longrightarrow L$ telle que :*

- *g et f sont homotopes.*
- *$f_{|K_1} = g_{|K_1}$.*
- *g est cellulaire sur K.*

Démonstration : Supposons que l'application soit cellulaire sur K' et sur les cellules de K de dimension strictement inférieure à p. Soit e_i^pune cellule de dimension p de K. Alors $f(\overline{e_i^p})$ est un compact de K, en tant qu'image d'un compact par une application continue, et donc est en pariculier fermé, et donc $f(\overline{e_i^p})$ ne rencontre qu'un nombre fini de cellulles de K. Il en va donc de même pour $f(e_i^p)$. On peut donc considérer

$$q = max\left\{dim(e_k^l)/f(e_i^p) \cap e_k^l \neq \emptyset\right\} \quad .$$

Soit e^q une cellule de dimension q dont l'intersection avec $f(e_i^p)$ n'est pas l'ensemble vide.

- 1^{er} cas : $A = e^q \setminus (e^q \cap f(e_i^p)) \neq \emptyset$
  Soit x un point de A. On peut alors projeter $f(e_i^p)$ sur la frontière de e^q. On peut prolonger cette déformation en une homotopie sur $K' \cup K^p$, définie par la projection sur $f(e_i^p)$, constante en dehors. Et, d'après le théorème de Borsuk, cette homotopie peut être étendue à tout K. On a donc le résultat voulu.
- 2^{eme} cas : $A = e^q \setminus (e^q \cap f(e_i^p)) = \emptyset$
  Par commodité, identifions e^p avec B^p et e^q avec B^q. Notons B_r^q la boule fermée de rayon r strictement inférieur à 1 incluse dans e^q. Comme f est cellulaire sur le squelette de simension $p-1$, on peut extraire de e^p un complexe simplicial F, contenant $e^p \cap f^{-1}(B_{\frac{5}{6}}^q)$. On considère ensuite une subdivision F' de F telle que :
  1- Pour tout simplexe α de F' tel que $f(\alpha) \cap B_{\frac{5}{6}}^q = \emptyset$, on ait $f(\alpha) \subset e^q$.
  2- Pour tout simplexe α de F' tel que $f(\alpha) \subset e^q$, $diam(f(\alpha)) < \frac{1}{6}$.
  Considérons maintenant F_1, le plus petit sous-complexe de F qui contienne tous les simplexes dont les images rencontrent $B_{\frac{4}{6}}^q$. Alors $B_{\frac{4}{6}}^q \cap f(e^p) \subset f(F_1) \subset B_{\frac{5}{6}}^q$.
  On introduit une application $f : F_1 \longrightarrow B_{\frac{5}{6}}^q$ égale à f sur les vertexes de F_1, et linéaire sur les simplexes. Alors f_1 et f sont homotopes : il suffit de considérer $H : F_1 \times I \longrightarrow B_{\frac{5}{6}}^q$ qui fait varier $f_1(x)$ vers $f(x)$ suivant le segment $[f_1(x), f(x)]$.
  Les applications f et f_1 peuvent être "recollées" ensembles par l'application

suivante :

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \notin B^q_{\frac{1}{2}} \text{ ou } x \notin e^p \\ f_1(x) \text{ si } f(x) \epsilon B^q_{\frac{1}{2}} \text{ ou } x \epsilon e^p \\ H(x, 3 - 6d(x,0)) \text{ sinon} \end{cases}$$

où 0 désigne le centre de B^q.
L'application $\overline{f}$ est bien continue, homotope à f, et égale à f sur $f^{-1}(e^q)$ et en dehors de e^p, et $\overline{f}$ a été construite de manière à ce que l'on puisse lui appliquer le point précédent. Enfin, on peut d'après le théorème de Borsuk étendre l'homotopie entre f et $\overline{f}$ sur tout K.

5.2 Théorème de Whitehead

Théorème 5.10. (théorème de Whitehead) *Soient* X *et* Y *deux CW-complexes,* et f : X $\longrightarrow$ Y *un morphisme. Si f induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie respectifs de* X *et de* Y, *alors c'est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration : démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme : Soit (K, L) une paire de CW-complexes, telle que, pour tout entier naturel i inférieur ou égal à n (appartenant à $\overline{N}$, fixé), on ait $\pi_i(K, L) = \star$. Alors il existe une paire (K', L') de CW-complexes telle que K et K', L et L' aient le même type d'homotopie et qui, pour tout i inférieur ou égal à n, les cellules de dimension i de K' soient dans L'.

Remarque : n peut éventuellement être infini. Dans ce cas, on a $K' = L'$, et donc $K \sim L$.

Démonstration du lemme : nous allons construire par récurrence une suite de CW-complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} K & \subset & K_0 & \subset & K_1 & \subset & \dots & \subset & K_n \\ \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ L & \subset & L_0 & \subset & L_1 & \subset & \dots & \subset & L_n \end{array}$$

où les inclusions $K \subset K_0 \subset \cdots \subset K_n$ et $L \subset L_0 \subset \cdots \subset L_n$ sont des équivalences d'homotopie, le diagramme est commutatif, et $K_i \setminus L_i$ ne contient pas de cellules de dimension inférieure ou égale à i, et où $K_i \setminus K_{i-1}$ne contient que des cellules de dimension $i+1$ et $i+2$.

Supposons que $K_0, \dots, K_i$ et $L_0, \dots, L_i$ aient déjà été construits. Soit e^{i+1} une cellule de dimension $i+1$ de $K_i$qui ne soit pas incluse dans L_i. Considérons l'application caractéristique f^{i+1} associée à cette cellule. Alors, par définition, f^{i+1} induit un homéomorphisme entre B^{i+1} et e^{i+1}, et $f^{i+1}(S^i) \subset K_i^{(i)}$. On peut alors voir f^{i+1} comme un morphisme relatif de (K_i, L_i) de dimension $i+1$, et comme par hypothèse $\pi_i(K,L) = \star$ et $K \sim K_i$, $L \sim L_i$ (par "transitivité" de cette relation), on a $\pi_i(K_i, L_i) = \star$, d'où f^{i+1} est homotope à un morphisme relatif g à valeurs dans L_i. On peut prendre de plus g de manière à ce que les restrictions de f^{i+1} et de g à S^i soient égales. Notons H l'homotopie entre ces deux morphismes relatifs. Alors H est constant sur $\partial e^{i+1} \times I$. Et, d'après le théorème d'approximation cellulaire, H est à valeurs dans $K_i^{(i+2)}$, et $H(e^{i+1} \times \{1\})$ est inclus dans $L_i^{(i+1)}$.

Mais on peut également voir H comme une application de B^{i+2} (à quelques homéomorphismes près) dans K_i, qui peut donc nous permettre de rattacher B^{i+3} à K_i (en voyant B^{i+2} comme l'hémisphère sud de S^{i+2}), ce qui nous donne deux nouvelles cellules, de dimension $i+2$ (l'hémisphère nord de S^{i+2}) et $i+3$ (l'intérieur de B^{i+3}) rattachées à K_i.

On procède de même pour chaque cellule de dimension $i+1$ de K_i qui ne soit pas dans L_i. On appelle alors K_{i+1}la réunion de K_i et de ces nouvelles cellules, et L_{i+1} la réunion de L_i, de $K_i^{(i+1)}$ et des nouvelles cellules de dimension $i+2$. On a bien alors le résultat voulu.

Si n est fini, le lemme est démontré. Sinon, il reste à montrer, en posant $K_\infty = \bigcup K_i$ et $L_\infty = \bigcup L_i$, que les inclusions $K \longrightarrow K_\infty$ et $L \longrightarrow L_\infty$sont bient des équivalences d'homotopie. Posons, pour tout entier naturel i, l'application $f_i : K_{i+1} \longrightarrow K_i$ définie comme étant l'inverse à homotopie près de l'inclusion $K_i \longrightarrow K_{i+1}$. On définit alors l'application $f : K_\infty \longrightarrow K$ comme étant égale à $f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_i$ sur K_i. Cette application est bien définie et est un inverse à homotopie près de l'inclusion $K \longrightarrow K_\infty$. On montre de la même manière que L et L_∞ ont le même type d'homotopie.

Retournons maintenant au théorème de Whitehead, et posons $K = (X \times I) \cup_f Y$ et $L = Y$. Alors l'inclusion $L \subset K$ induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie de K et de L, puisque f induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie de X et Y.

On a la suite exacte

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(K) \xrightarrow{j_*} \pi_n(K,L) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Mais alors i_*étant un isomorphisme, on a $Im\partial = Ker(i_*) = \{0\}$, $Im(i_*) = Ker(j_*) = \pi_n(K,L)$ et $Ker\partial = Im(j_*) = \{0\}$, d'où $\pi_n(K,L) = \star$. On est donc dans les conditions du lemme, avec $n = \infty$, d'où $K \sim L = Y$, et donc $X \sim Y$.

Remarque : Ce résultat reste malgré tout d'un intéret tout théorique, étant donné qu'on ne sait pas, en règle générale, calculer les groupes fondamentaux successifs d'espaces topologiques, à part dans certains cas particuliers ou triviaux.

REMERCIEMENTS

Je tiens ici à remercier mon maître de mémoire, Gael Collinet, pour sa disponibilité, ses nombreux conseils et toutes les fois où il a pu me sortir des impasses où je restais bloqué.

Je tiens également à remercier Francois Lefèvre, maître de conférences de l'UFR de Reims, grâce à qui j'ai pu emprunter gratuitment des ouvrages de la bibliothèque universitaire de Reims durant les vacances.

Plus gééralement, je souhaite remercier ma famille et mes amis, pour leur soutien, ou tout simplement pour m'avoir patiemment supporté lorsque je parlais de choses étranges que ne les intéressaient pas forcément.

BIBLIOGRAPHIE

M. AUDIN- *Topologie : revêtements et groupe fondamental*

G. E. BREDON- *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1993

A. T. FOMENKO, D. B. FUCHS, V. L. GUTENMACHER- *Homotopic Topology*, Akademiai Kiado, Budapest, 1986

C. GODBILLON- *Eléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971

S. Mac LANE- *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1971