

Mémoire

Les dimensions fractales

Elchinger Olivier

15 septembre 2006

Table des matières

1	Dimensions fractales	2
1.1	Dimension de Hausdorff	2
1.2	Propriétés des mesures et de la dimension de Hausdorff	5
1.3	Dimension boîte	8
1.4	Calculs de dimensions	9
2	Système de fonctions itérées	12
2.1	Définition	12
2.2	Exemple avec le triangle de Sierpinski	16
2.3	Généralisation à d'autres IFS	18
3	Itération de fonctions complexes	19
3.1	Généralités sur les ensembles de Julia	20
3.2	Fonctions quadratiques	24

Introduction

J'ai commencé ce mémoire avec pour but de découvrir ce qu'étaient les dimensions non-entières que l'on pouvait attribuer aux fractales et comment les calculer. Je voulais également comprendre le lien entre ces nouvelles dimensions et la dimension algébrique usuelle. Je désirais enfin connaître les dimensions de fractales classiques, ce qui m'a amené à parler des systèmes de fonctions itérées, ainsi que des itérations de fonctions complexes.

1 Dimensions fractales

1.1 Dimension de Hausdorff

La dimension de Hausdorff peut être définie pour tout ensemble, mais elle n'est généralement pas aisée à calculer.

Pour un sous-ensemble non-vide U d'un espace euclidien de dimension n , \mathbb{R}^n , on définit le diamètre de U , noté $\text{diam}(U)$ ou $|U|$ par : $\text{diam}(U)=|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ où $|\cdot|$ est la distance euclidienne usuelle.

Si un ensemble F est recouvert par une collection dénombrable $\{U_i\}$ de diamètre au plus δ , c'est-à-dire $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ avec $0 < |U_i| \leq \delta$ pour tout i , on dit que $\{U_i\}$ est un δ -recouvrement de F .

Soient F un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et s un réel positif. Pour tout $\delta > 0$, on définit

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\}$$

Quand δ décroît, il y a moins de recouvrements possibles de F et $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ augmente, et donc a une limite quand $\delta \rightarrow 0$. On écrit

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Cette limite existe pour tout sous-ensemble F de \mathbb{R}^n , et peut être 0 ou ∞ . On appelle $\mathcal{H}^s(F)$ la *mesure de Hausdorff s -dimensionnelle* de F .

On admettra que \mathcal{H}^s est une mesure borélienne sur \mathbb{R}^n . Cela peut être montré en utilisant le théorème de Carathéodory, voir [3].

On a donc les propriétés usuelles d'une mesure pour \mathcal{H}^s :

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$$

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F) \quad \text{si } E \subset F \subset \mathbb{R}^n$$

Si F_1, F_2, \dots est une suite dénombrable (ou finie) d'ensembles de \mathbb{R}^n alors

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) \quad \text{avec égalité} \quad \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$$

si les F_i sont des boréliens disjoints.

Les propositions suivantes donnent les premières propriétés des mesures de Hausdorff, permettant par la suite de définir la dimension de Hausdorff d'un ensemble.

Proposition 1.1.1 Si $F \subset \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$ alors

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \quad \text{où } \lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$$

Démonstration Si $\{U_i\}$ est un δ -recouvrement de F , alors $\{\lambda U_i\}$ est un $\lambda\delta$ -recouvrement de λF . D'où

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \Rightarrow \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$$

car l'inégalité est valable pour tout δ -recouvrement $\{U_i\}$. En faisant tendre $\delta \rightarrow 0$, on obtient

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(\lambda F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

En remplaçant λ par $1/\lambda$ et F par λF on obtient l'autre inégalité, d'où le résultat.

Un raisonnement similaire donne une estimation de la mesure de Hausdorff sur l'effet de transformations plus générales sur les ensembles.

Proposition 1.1.2 Soient $F \subset \mathbb{R}^n$ et $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application vérifiant la condition de Hölder d'exposant α

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in F$$

pour des constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$. Alors, pour tout $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

Démonstration Si $\{U_i\}$ est un δ -recouvrement de F , comme $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$, on a que $\{f(F \cap U_i)\}$ est un ε -recouvrement de $f(F)$, où $\varepsilon = c\delta^\alpha$.

Donc $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$, ainsi en prenant d'abord l'infimum sur les ε -recouvrements, on a $\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$, ensuite, comme l'inégalité est vraie pour tout δ -recouvrement, en prenant l'infimum sur ceux-ci, on obtient $\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Quand $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ aussi, d'où le résultat.

En particulier, pour $\alpha = 1$, on obtient comme on pouvait s'y attendre que \mathcal{H}^s est invariante par isométrie, donc par translation et rotation.

Proposition 1.1.3 Soit F un ensemble. Si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ alors $\mathcal{H}^t(F) = 0 \forall t > s$.

Démonstration Soit U_i un δ -recouvrement de F , donc $0 \leq |U_i| < \delta \forall i$. On a $\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$ d'où l'on obtient $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Or $\mathcal{H}_\delta^s(F) < \infty$ donc en faisant tendre δ vers 0, on trouve $\mathcal{H}^t(F) \leq 0$ soit $\mathcal{H}^t(F) = 0 \forall t > s$.

Ainsi, la mesure s -dimensionnelle d'un ensemble vaut d'abord l'infini pour s petit, puis zéro si s dépasse un certain seuil, qui est précisément la dimension de l'ensemble.

Définition 1.1.4 La dimension de Hausdorff d'un ensemble F est donnée par

$$\dim_H(F) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

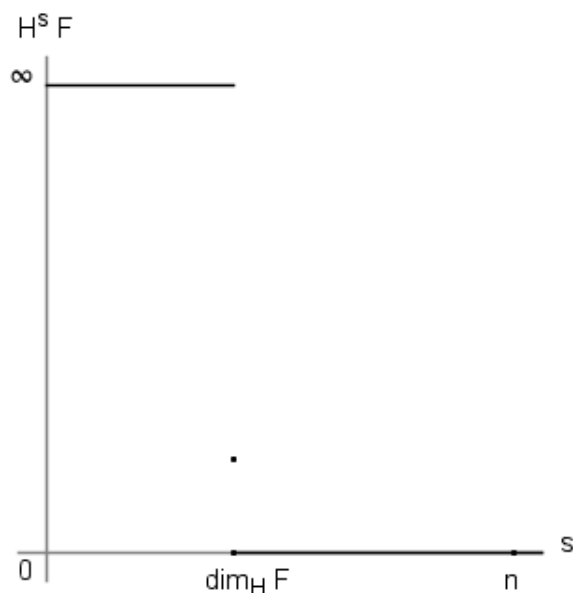


FIG. 1 – Graphe de $\mathcal{H}^s(F)$ en fonction de s pour un ensemble F

On a donc

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F) \end{cases}$$

Remarque : pour $s = \dim_H(F)$, les trois cas peuvent se produire :

$\mathcal{H}^{\dim_H(F)}(F) = 0$ par exemple si $F = \emptyset$

$\mathcal{H}^{\dim_H(F)}(F) = \infty$ par exemple si $F = \mathbb{R}^n$

$0 < \mathcal{H}^{\dim_H(F)}(F) < \infty$ par exemple si F est un ouvert borné de \mathbb{R}^n

Proposition 1.1.5 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble et $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application satisfaisant à la condition de Hölder $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ pour des constantes $c > 0$, $\alpha > 0$. Alors $\dim_H(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F)$

Démonstration Si $s > \dim_H(F)$ alors $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0$ car $\mathcal{H}^s(F) = 0$, donc $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) = 0 \Rightarrow \frac{s}{\alpha} > \dim_H(f(F))$.

Ainsi, $\forall s > 0$, $s > \dim_H(F) \Rightarrow s > \alpha \dim_H(f(F))$ donc $\dim_H(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F)$

Corollaire 1.1.6 Soit $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application.

a) Si f est lipschitzienne i.e. $\exists c > 0, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$,

alors $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$

b) Si f est bi-lipschitzienne i.e. $\exists 0 < c_1 \leq c_2, c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$,

alors $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$

En topologie, on considère les ensembles à homéomorphisme près. Avec des fractales, on peut considérer que deux ensembles sont équivalents, et en particulier ont la même dimension de Hausdorff, s'il existe une application bi-lipschitzienne entre les deux ; comme cette application est nécessairement continue, deux fractales équivalentes ont la même topologie.

La dimension seule n'apprend pas forcément beaucoup, sauf si elle est strictement plus petite que 1, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.1.7 Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ avec $\dim_H(F) < 1$ est totalement discontinu.

Démonstration Soient x et y deux points distincts de F . Définissons une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ par $f(z) = |z - x|$. Comme f est contractante, car $|f(z) - f(w)| \leq |z - w|$ on obtient par le corollaire 1.1.6 a) que $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F) < 1$. Ainsi, $f(F)$ est un sous-ensemble de \mathbb{R} de mesure \mathcal{H}^1 ou longueur nulle et a donc un complément dense. Choisissons r avec $r \notin f(F)$ et $0 < r < f(y)$, il s'ensuit que

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}$$

Donc F est la réunion de deux ouverts disjoints, l'un contenant x et l'autre y , donc x et y appartiennent à deux composantes connexes différentes de F .

1.2 Propriétés des mesures et de la dimension de Hausdorff

Les mesures de Hausdorff sont en fait une généralisation des notions de longueur, d'aire, de volume, etc. Il peut être montré que pour des sous-ensembles de \mathbb{R}^n , \mathcal{H}^n est la mesure de Lebesgue en dimension n , multipliée par une constante qui est le volume n -dimensionnel de la boule unité.

Le saut de l'infini à zéro pour la mesure se retrouve sur l'exemple du disque, qui a un volume nul, mais une « longueur » infinie, le saut s'effectuant sur la dimension, qui ici est 2, \mathcal{H}^2 mesurant les aires.

D'autre part, des sous-ensembles assez réguliers comme des ouverts ou des boréliens dans \mathbb{R}^n ont n comme dimension de Hausdorff.

Proposition 1.2.1 On va démontrer les propriétés suivantes

i) \mathcal{H}^0 est la mesure de comptage

ii) \mathcal{H}^1 est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}

iii) Pour tout ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ à support compact, $\mathcal{H}^s(F) = 0$ si $s > n$.

iv) Si F_1, F_2, \dots est une famille dénombrable d'ensembles de \mathbb{R}^n ,

alors $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\}$

Cette dernière propriété est appelée stabilité dénombrable

Démonstration

i) Soit F une partie finie de \mathbb{R}^n . Notons $\delta_0 = \min\{|x - y|, x \neq y, x, y \in F\}$.

Soit δ tel que $0 < \delta < \delta_0$, alors $\mathcal{H}_\delta^0(F) = \#F$.

En effet, comme $F \subset \bigcup_{x \in F} \{x\}$, $\mathcal{H}_\delta^0(F) \leq \sum_{x \in F} 1 = \#F$.

D'autre part, si $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ où I est dénombrable et $|U_i| < \delta$, alors $\#F \leq \#I$, car δ est plus petit que la plus petite distance entre deux points de F . Donc $\sum_{i \in I} |U_i|^0 = \#I \geq \#F$, puis en prenant les infima, $\mathcal{H}_\delta^0(F) \geq \#F$. On obtient l'égalité en faisant tendre δ vers 0.

Si F est infini, on obtient le résultat en prenant une suite $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ d'ensembles finis convergente vers F , $\mathcal{H}^0(E_1) \leq \mathcal{H}^0(E_2) \leq \dots \leq \mathcal{H}^0(F)$, comme $\{\mathcal{H}^0(E_n)\}_n$ diverge vers l'infini, on obtient bien $\mathcal{H}^0(F) = \infty$.

ii) Comme \mathcal{H}^1 est une mesure invariante par translation, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^1([0, 1]) = 1$ car la mesure de Lebesgue est l'unique mesure invariante par translation sur \mathbb{R} vérifiant cette égalité.

Découpons l'intervalle $[0, 1]$ en $U_i = \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]$ pour $i = 1, \dots, k$.

Alors $\mathcal{H}_{1/k}^1([0, 1]) \leq \sum_{i=1}^k |U_i|^1 = 1$, quand $n \rightarrow \infty$ on a $\mathcal{H}^1([0, 1]) \leq 1$.

Soient $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un δ -recouvrement de $[0, 1]$ par des ouverts tel que $|\mathcal{H}_\delta^1([0, 1]) - \sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)| < \varepsilon$.

Il existe une famille $(a_p)_{0 \leq p \leq q}$ telle que $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$ et chaque intervalle $[a_p, a_{p+1}]$ est inclu dans un seul ensemble U_i .

Ainsi, $\mathcal{H}_\delta^1([0, 1]) + \varepsilon > \sum_{i=1}^q \text{diam}([a_i, a_{i+1}]) = 1$, il suffit de faire tendre ε , puis δ vers 0, pour obtenir $\mathcal{H}^1([0, 1]) \geq 1$, donc l'égalité $\mathcal{H}^1([0, 1]) = 1$.

iii) Il suffit de le montrer pour $[0, 1]^n$. Comme précédemment, on découpe

$$[0, 1]^n = \bigcup_{0 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq \frac{k-1}{k}} (i_1, \dots, i_n) + \left[0, \frac{1}{k}\right]^n$$

et comme $\text{diam}\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]^n\right) = \frac{\sqrt{n}}{k}$, on obtient

$$\mathcal{H}_{\frac{\sqrt{n}}{k}}^s([0, 1]^n) \leq \sum \text{diam}\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]^n\right)^s = k^n \left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)^s = \frac{n^{s/2}}{k^{s-n}}$$

quand $k \rightarrow \infty$ on obtient $\mathcal{H}^s([0, 1]^n) = 0$.

iv) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \geq \dim_H(F_j) \geq \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\}$$

D'autre part, si $s \geq \dim_H(F_i) \forall i$ alors $\mathcal{H}^s(F_i) = 0 \forall i \Rightarrow \mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$, donc $s \geq \dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$.

Ainsi $\sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\} \geq \dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$.

Montrons encore ce qui a été énoncé pour les ensembles « réguliers ».

Théorème 1.2.2 *Si \mathcal{B} est un borélien borné de \mathbb{R}^n avec $\mathcal{L}^n(\mathcal{B}) > 0$ alors $\dim_H(\mathcal{B}) = n$, \mathcal{L}^n étant la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .*

Commençons par le

Lemme 1.2.3 (lemme de recouvrement de Vitali) *Soit M une partie bornée de \mathbb{R}^n et \mathcal{F} un ensemble de boules recouvrant M , de rayon majoré. On peut extraire de \mathcal{F} un sous-ensemble \mathcal{E} constitué de boules deux-à-deux disjointes tel que*

$$M \subset \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{E}} \widetilde{\mathcal{B}}$$

où $\widetilde{\mathcal{B}}$ est la boule de même centre que \mathcal{B} et de rayon quatre fois celui de \mathcal{B} .

Preuve On construit par récurrence deux suites d'ensembles $\{\mathcal{E}_n\}_n$, $\{\mathcal{F}_n\}_n$ et une suite de réels $\{r_n\}_n$:

on pose $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ et $r_0 = \sup\{R(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \in \mathcal{F}_0\}$ où $R(\mathcal{B})$ est le rayon de la boule \mathcal{B} .

On fixe $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{F}_0$ tel que $R(\mathcal{B}_0) \geq \frac{r_0}{2}$ et on pose $\mathcal{E}_0 = \{\mathcal{B}_0\}$.

On construit $\mathcal{F}_{n+1} = \{\mathcal{B} \in \mathcal{F} : \forall \mathcal{B}' \in \mathcal{E}_n, \mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \emptyset\}$

et on pose $r_{n+1} = \sup\{R(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \in \mathcal{F}_{n+1}\}$.

On fixe $\mathcal{B}_{n+1} \in \mathcal{F}_{n+1}$ tel que $R(\mathcal{B}_{n+1}) \geq \frac{r_{n+1}}{2}$ et on pose $\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n \cup \{\mathcal{B}_{n+1}\}$.

Montrons que l'ensemble $\mathcal{E} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{E}_n$ convient.

Soit $x \in M$, $\exists \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, $x \in \mathcal{B}$. Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}_{n+1}$ (n existe car M est borné). Il existe alors $\mathcal{B}' \in \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ sinon on aurait choisi \mathcal{B} au lieu de \mathcal{B}_n . On a $R(\mathcal{B}') \geq \frac{R(\mathcal{B})}{2}$, donc $2R(\mathcal{B}') \geq R(\mathcal{B})$ et $x \in \mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{B}'}$, d'où le résultat.

Démonstration du théorème Soit \mathcal{B} un borélien borné, avec $\mathcal{L}^n(\mathcal{B}) > 0$.

Il existe M tel que $\text{diam}(\mathcal{B}) \leq M$. Recouvrons \mathcal{B} par un quadrillage de l'espace composé de k_δ n -cubes de diamètre $\delta < M$. Soit $D > M$ le diamètre du plus petit quadrillage n -cubique recouvrant \mathcal{B} .

On a alors $k_\delta < D^n$ d'où $k_\delta \delta^n < D^{2n}$, donc $\mathcal{H}_\delta^n(\mathcal{B}) \leq D^{2n}$ puis $\mathcal{H}^n(\mathcal{B}) \leq D^{2n}$.

On a bien $\mathcal{H}^n(\mathcal{B}) < \infty$.

Pour l'autre inégalité, soit $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un δ -recouvrement de \mathcal{B} tel que $|\mathcal{H}_\delta^n(\mathcal{B}) - \sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)| < \varepsilon$.

$\forall i \in I$, soit \mathcal{B}_i une boule contenant U_i et de rayon $2|U_i|$.

\mathcal{B} et $\{\mathcal{B}_i : i \in I\}$ vérifient les hypothèses du lemme, donc on extrait un sous-ensemble $\{\mathcal{B}_j : j \in J\}$ de boules deux-à-deux disjointes tel que $\mathcal{B} \subset \bigcup_{j \in J} \widetilde{\mathcal{B}_j}$ d'où

$$\begin{aligned} 0 < \mathcal{L}^n(\mathcal{B}) &\leq \sum_{j \in J} \mathcal{L}^n(\widetilde{\mathcal{B}_j}) \leq 4^n \sum_{j \in J} \mathcal{L}^n(\mathcal{B}_j) \\ &\leq 4^n \sum_{j \in J} \text{vol}^n(B_u) (4|U_j|)^n = 16^n \text{vol}^n(B_u) \sum_{j \in J} |U_j|^n \leq K^n \sum_{i \in I} |U_i|^n \end{aligned}$$

où $\text{vol}^n(B_u)$ est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n et K la constante $K = 16^n \text{vol}^n(B_u)$. Ainsi $\mathcal{H}_\delta^n(\mathcal{B}) + \varepsilon > \sum_{i \in I} |U_i|^n > \frac{1}{k^\delta} > 0$. En faisant tendre ε , puis δ vers 0, on obtient $0 < \mathcal{H}^n(\mathcal{B}) < \infty$. On trouve bien $\dim_H(\mathcal{B}) = n$.

1.3 Dimension boîte

Egalement appelée dimension de Minkowski, la dimension boîte est plus simple à calculer, mais présente quelques désavantages théoriques.

Définition 1.3.1 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné. Soit $N_\delta(F)$ le plus petit nombre d'ensemble de diamètre au plus δ qui recouvrent F . Les dimensions boîte inférieures et supérieures sont définies respectivement par

$$\underline{\dim}_B(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad \overline{\dim}_B(F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Si les deux limites sont égales, la dimension boîte de F est

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Pour obtenir la limite, il suffit que δ tende vers 0 en décroissant avec une suite δ_k telle que $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ pour une constante $0 < c < 1$. En effet, si $\delta_{k+1} \leq \delta \leq \delta_k$, alors

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \right)} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

ainsi $\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$. On obtient l'autre inégalité à partir de $\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$. De même avec les limites inférieures.

Remarque : on peut montrer qu'on ne change pas la valeur de la dimension boîte si on prend pour $N_\delta(F)$ le plus petit nombre de boules de diamètre δ , ou de cubes de cotés δ , qui recouvrent F , ou encore, si on quadrille l'espace par des cubes de cotés δ , $N_\delta(F)$ peut être pris comme le nombre de cubes du quadrillage d'intersection non vide avec F . C'est l'idée qui a donné le nom de dimension boîte : pour une valeur de δ fixée, on « emboîte » F dans un quadrillage formé de cubes de côté δ et on compte le nombre de cubes intersectant F , cela donne une indication de l'irrégularité de l'ensemble à l'échelle δ . La dimension reflète la vitesse à laquelle les irrégularités se développent quand $\delta \rightarrow 0$.

Proposition 1.3.2 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ borné. On a la relation entre la dimension de Hausdorff et la dimension boîte

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$$

Démonstration Soit $s = \dim_H(F)$. Si F peut être recouvert par $N_\delta(F)$ ensembles de diamètre δ , alors $\mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s \leq KN_\delta(F)\delta^s$, où $K \geq 1$ est choisi de telle sorte que $1 < KN_\delta(F)\delta^s$. En prenant les logarithmes, $s < \frac{\log K + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}$ et comme $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log K}{-\log \delta} = 0$, on obtient $s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \underline{\dim}_B(F)$.

Donc $\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$

La proposition suivante, a priori attirante, met en évidence quelques faiblesses de la dimension boîte.

Proposition 1.3.3 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné et \bar{F} son adhérence.

Alors $\underline{\dim}_B(F) = \underline{\dim}_B(\bar{F})$ et $\overline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(\bar{F})$.

Démonstration Soient B_1, \dots, B_k des boules fermées de rayon δ . Si l'ensemble fermé $\bigcup_{i=1}^k B_i \supset F$, alors $\bigcup_{i=1}^k B_i \supset \bar{F}$. Donc le plus petit nombre de boules fermées de rayon δ recouvrant F est le même que pour \bar{F} , d'où le résultat.

Cette proposition mène à la situation suivante : soit $F = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ l'ensemble des rationnels entre 0 et 1. F est dénombrable, donc de dimension de Hausdorff nulle : $\dim_H(F) = 0$, mais $\dim_B(F) = \dim_B(\bar{F}) = \dim_B([0, 1]) = 1$ car il faut $1/\delta$ segments de longueur δ pour recouvrir l'intervalle $[0, 1]$.

Pour remédier à ce problème, d'autres définitions plus fines de la dimension boîte peuvent être mises en place ; il existe aussi d'autres définitions de dimensions que celles qui ont été vues permettant d'obtenir plus d'informations sur l'ensemble étudié.

Pour un outil donnant une indication de « dimension », on s'attend à avoir plusieurs des propriétés suivantes, toutes vérifiées par la dimension de Hausdorff.

Monotonie : si $E \subset F$ $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$

Stabilité : $\dim_H(E \cup F) = \max(\dim_H(E), \dim_H(F))$

Stabilité dénombrable : $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$

Invariance géométrique : $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$ si f est une isométrie

Invariance bi-lipschitzienne : $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$ si f est bi-lipschitzienne

Ensemble dénombrables : $\dim_H(F) = 0$ si F est dénombrable

Ouverts : si F est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors $\dim_H(F) = n$

Si la dimension boîte ne vérifie pas la propriété sur les ensembles dénombrables, elle est tout de même très utile, car $\underline{\dim}_B$ et $\overline{\dim}_B$ vérifient presque toutes les propriétés, par exemple l'invariance par transformation bi-lipschitzienne. En effet, si f vérifie $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ et que F peut être recouvert par $N_\delta(F)$ ensembles de diamètres au plus δ , alors les $N_\delta(F)$ images par f de ces ensembles forment un recouvrement d'ensembles de diamètres au plus $c\delta$, d'où $\underline{\dim}_B(f(F)) \leq \underline{\dim}_B(F)$ et $\overline{\dim}_B(f(F)) \leq \overline{\dim}_B(F)$.

1.4 Calculs de dimensions

Nous allons à présent calculer les dimensions de Hausdorff et dimensions boîte de quelques fractales simples bien connues.

Exemple 1.4.1 Soit $C \subset [0, 1]$ l'ensemble triadique de Cantor.

La dimension de Hausdorff de C et la dimension boîte de C sont égales et

$$\dim_H(C) = \dim_B(C) = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\dots$$

Calcul Commençons par déterminer la dimension de Hausdorff.

Notons E_k la réunion des intervalles de longueur 3^{-k} , appelés intervalles fondamentaux, lors de la $k^{\text{ième}}$ étape dans la construction de $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$.

Soit $\{U_i\}$ le recouvrement de C composé de 2^k intervalles de longueur 3^{-k} , on obtient



FIG. 2 – Les premières étapes de la construction de l'ensemble de Cantor

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq \sum |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} = 1 \text{ pour } s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on trouve $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$.

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de C . Comme C est compact, on peut toujours supposer que les U_i forment une collection finie de sous-intervalles fermés de $[0, 1]$. Pour chaque U_i , soit k l'entier vérifiant $3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}$. U_i n'intersecte au plus qu'un seul intervalle fondamental de E_k car la distance entre deux de ces intervalles est 3^{-k} . Pour $j \geq k$, U_i intersecte $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ intervalles fondamentaux de E_j . Pour j assez grand, $3^{-(j+1)} \leq |U_i| \forall i$, et comme $\{U_i\}$ intersecte tous les 2^j intervalles fondamentaux de longueur 3^{-j} , en comptant les intervalles, on trouve

$$2^j \leq \sum 2^j 3^s |U_i|^s \iff \frac{1}{2} = 3^{-s} \leq \sum |U_i|^s.$$

Ceci étant valable pour tout recouvrement $\{U_i\}$ de C , on a $\mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi } \frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C) \leq 1 \text{ donc } \dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

La dimension boîte s'obtient sensiblement de la même façon. Le recouvrement par les 2^k intervalles de E_k de longueurs 3^{-k} donne que $N_\delta(C) \leq 2^k$ si $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$. On a

$$\overline{\dim}_B(C) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(C)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{(k-1) \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

D'autre part, tout intervalle de longueur δ tel que $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ intersecte au moins un intervalle fondamental de longueur 3^{-k} . Il y a 2^k de ces intervalles donc au moins 2^k intervalles de longueur δ sont nécessaires pour recouvrir C . Donc $N_\delta(C) \geq 2^k$ et donc $\underline{\dim}_B(C) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$.

$$\text{Ainsi } \dim_B(C) = \dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Une autre façon bien plus rapide d'effectuer le calcul, mais nécessitant une supposition de taille (pouvant être justifiée) est d'utiliser la proposition de changement d'échelle 1.1.1.

L'ensemble de Cantor se divise en sa partie gauche $C_g = C \cap [0, \frac{1}{3}]$ et sa partie droite $C_d = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$, toutes deux égales à l'ensemble de Cantor multiplié par un facteur $\frac{1}{3}$. Comme C est réunion disjointe de ces deux parties, $C = C_g \cup C_d$, pour tout $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_g) + \mathcal{H}^s(C_d) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C)$$

En supposant maintenant qu'à la valeur critique $s = \dim_H(C)$, on ait $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$, on peut simplifier par $\mathcal{H}^s(C)$ pour obtenir $1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s \Rightarrow s = \dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

En utilisant les mêmes arguments, on obtient sans difficulté les dimensions boîte et de Hausdorff d'autres fractales construites par itérations à partir d'un motif de départ.

Exemple 1.4.2 Soit K la courbe de Koch.

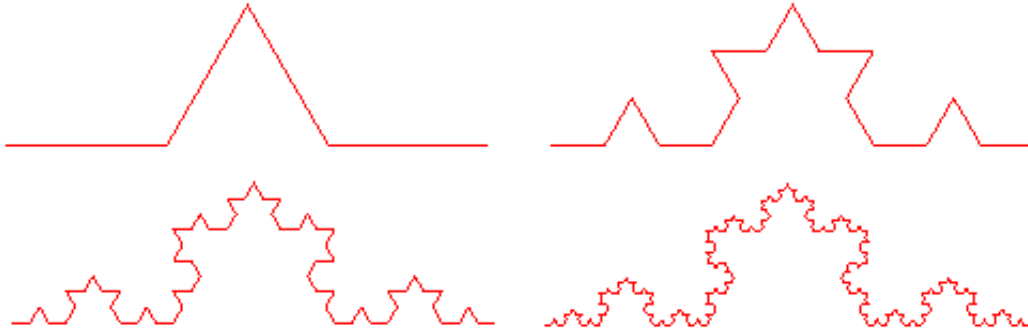


FIG. 3 – Les premières étapes de la construction de la courbe de Koch

La dimension de Hausdorff de K et la dimension boîte de K sont égales et $\dim_H(K) = \dim_B(K) = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618\dots$

On obtient la courbe de Koch par itérations à partir du segment $[0, 1]$ en remplaçant le tiers central par un triangle équilatéral de côté le tiers qu'on enlève, puis en recommençant cette opération à l'infini sur chaque segment de la figure obtenue.

Exemple 1.4.3 Soit S le triangle de Sierpinski.

La dimension de Hausdorff de S et la dimension boîte de S sont égales et $\dim_H(S) = \dim_B(S) = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849\dots$

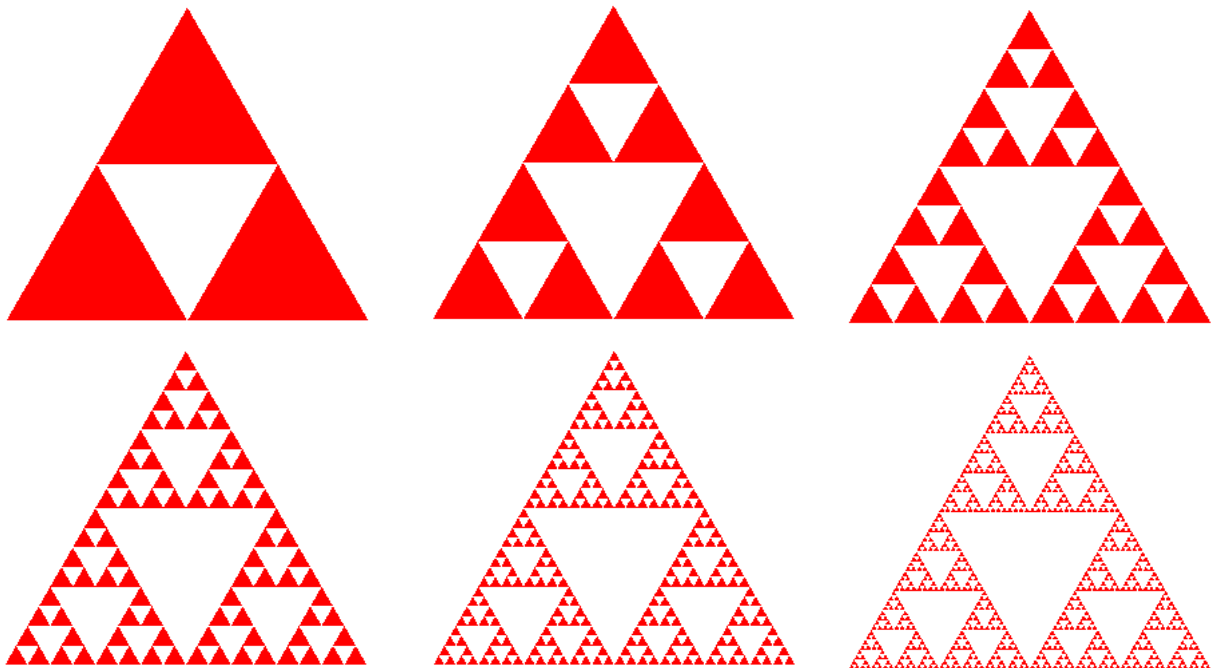


FIG. 4 – Les premières étapes dans la construction du triangle de Sierpinski

On obtient le triangle de Sierpinski par itérations à partir d'un triangle équilatéral duquel on enlève le triangle central i.e. celui dont les sommets sont les milieux des cotés du triangle de départ, on recommence cette opération à l'infini sur chaque triangle restant.

On peut aussi construire des fractales « en 3D », c'est à dire en partant d'objets à trois dimensions, la plus connue est l'éponge de Menger, construite à partir d'un cube.

Exemple 1.4.4 Soit M l'éponge de Menger.

La dimension de Hausdorff de M et la dimension boîte de M sont égales et $\dim_H(M) = \dim_B(M) = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,7268\dots$

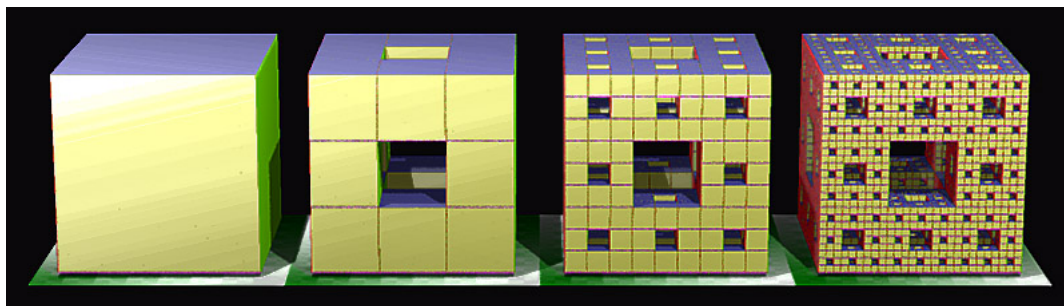


FIG. 5 – Les premières étapes de la construction de l'éponge de Menger

On obtient l'éponge de Menger par itérations à partir d'un cube qu'on découpe en 27 cubes de cotés le tiers du premier, puis on enlève le petit cube central et les 6 cubes ayant une face commune avec lui, on recommence cette opération à l'infini sur chaque cube restant.

2 Système de fonctions itérées

2.1 Définition

Toutes les fractales vues précédemment sont des IFS (Iterated Function Systems), systèmes de fonctions itérées. Elles sont toutes construites par récurrence à partir de transformations d'un motif initial.

C'est en écrivant une fractale F comme réunion d'images de F par certaines transformations que l'on peut calculer sa dimension facilement comme cela a été fait à la fin de l'exemple 1.4.1.

Définition 2.1.1 Soit D un fermé de \mathbb{R}^n . On appelle contraction une application $S : D \rightarrow D$ s'il existe un nombre c avec $0 < c < 1$ tel que $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y| \forall x, y \in D$. Une contraction est donc une application continue. Si on a l'égalité $|S(x) - S(y)| = c|x - y| \forall x, y \in D$, S transforme les ensembles en des ensembles similaires et est appelée une similarité. Soient S_1, \dots, S_m des contractions. On dit qu'un sous-ensemble F de D est invariant par les transformations S_i si

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

On définit une métrique sur les sous-ensembles de D . On note $K(D)$ l'ensemble de tout les sous-ensembles compacts non vides de D . On appelle δ -voisinage d'un ensemble $A \subset K(D)$ l'ensemble des points à distance $\delta > 0$ de A , il est noté $\mathcal{V}_\delta(A) = \{x \in D, |x - a| < \delta \text{ pour un } a \in A\}$.

Définition 2.1.2 On munit $K(D)$ d'une structure d'espace métrique en définissant la distance $d_{\mathcal{H}}(A, B)$ de deux sous-ensembles A et B de $K(D)$ comme étant le plus petit nombre δ tel que le δ -voisinage de A contient B et vice-versa :

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf\{\delta > 0, A \subset \mathcal{V}_\delta(B) \text{ et } B \subset \mathcal{V}_\delta(A)\}$$

On vérifie aisément que c'est une distance appelée la *métrique de Hausdorff* sur $K(D)$.

On a, pour tous $A, B, C \in K(D)$

i) $d_{\mathcal{H}}(A, B) \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $A = B$,

ii) $d_{\mathcal{H}}(A, B) = d_{\mathcal{H}}(B, A)$,

iii) $d_{\mathcal{H}}(A, B) \leq d_{\mathcal{H}}(A, C) + d_{\mathcal{H}}(C, B)$

Si la distance $d_{\mathcal{H}}(A, B)$ est petite, les ensembles A et B sont en un certain sens proches, ils ont des formes qui se ressemblent.

Proposition 2.1.3 Si (E, d) est un espace métrique complet, alors $(K(E), d_{\mathcal{H}})$ est aussi un espace métrique complet.

Démonstration Soit $\{X_n\}$ une suite de Cauchy dans $K(E)$. Alors il existe une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall m, n \geq N, d_{\mathcal{H}}(X_m, X_n) < \varepsilon_N$

donc $\forall m, n \geq N, X_m \subset \mathcal{V}_{\varepsilon_N}(X_n)$

On pose

$$X = \{x \in E : \text{il existe une suite } (x_n) \text{ avec } x_n \in X_n \text{ et } x \text{ est valeur d'adhérence de } (x_n)\}$$

Montrons que $X \in K(E)$ i.e. que X est compact et non-vide.

On va commencer par montrer que X est fermé.

Soient $y \in \bar{X}$ et (y_n) une suite de X tendant vers y . Pour chaque entier m , y_m est limite d'une suite (x_n) tel que $x_n \in X_n$. On choisit maintenant pour chaque y_m un point $x_{n_m} \in X_{n_m}$ de la suite (x_n) correspondante pour construire une sous-suite (x_{n_m}) telle que $d(x_{n_m}, y_m) \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$. Pour satisfaire à la définition de X , on définit une (sur-)suite (x_k) à partir de la sous-suite (x_{n_m}) où l'on choisit x_k quelconque dans X_k si k n'appartient pas à l'ensemble des n_m . Alors

$$d(x_{n_m}, y) \leq \underbrace{d(x_{n_m}, y_m)}_{\substack{\rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} + \underbrace{d(y_m, y)}_{\substack{\rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}}$$

Donc y est valeur d'adhérence de (x_k) donc $y \in \bar{X}$. Ainsi $\bar{X} \subset X$ donc X est fermé. De plus, comme X est fermé dans E qui est complet, X est complet.

Montrons que X est précompact.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe clairement N tel que $X \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X_N)$. Pour tout $y \in X$, il existe $x_y \in X_N$ tel que $d(y, x_y) < \varepsilon$. Pour $n > N$, comme X_n est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules $B_\varepsilon(z_i)$ de centres $z_i \in X_n$ et de rayons ε . Les boules de centres z_i et de rayons 2ε recouvrent donc X . On supprime les z_i inutiles, ceux pour lesquels

$B_{2\varepsilon}(z_i) \cap X = \emptyset$. Il reste les z_i pour, disons, $i \in [1, M]$.

On détermine alors, pour tout $i \in [1, M]$, un élément z'_i de X tel que $d(z_i, z'_i) < 2\varepsilon$ (car on a supprimé les z_i inutiles). Les boules $B_{4\varepsilon}(z'_i)$ forment alors un recouvrement fini de X qui est donc précompact.

X est précompact et complet, donc compact.

Il convient de montrer que X est non-vide, ce qui sera fait en même temps que de montrer la convergence des X_n vers X au sens de la distance de Hausdorff.

Il faut voir que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un N tel que pour $n > N$, on ait $X \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X_n)$ ce qui a déjà été vu, et $X_n \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X)$. Pour ce faire, on se fixe $x \in X_n$ avec n tel que $\varepsilon_n \leq \varepsilon$.

On considère alors

$n_0 > n$ tel que $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon/2^1$ et $x_{n_0} \in X_{n_0}$ tel que $d(x, x_{n_0}) < \varepsilon/2^1$

$n_1 > n_0$ tel que $\varepsilon_{n_1} < \varepsilon/2^2$ et $x_{n_1} \in X_{n_1}$ tel que $d(x_{n_0}, x_{n_1}) < \varepsilon/2^2$

...

$n_p > n_{p-1}$ tel que $\varepsilon_{n_p} < \varepsilon/2^{p+1}$ et $x_{n_p} \in X_{n_p}$ tel que $d(x_{n_{p-1}}, x_{n_p}) < \varepsilon/2^{p+1}$

...

La suite des x_{n_p} est de Cauchy dans (E, d) complet donc elle converge vers un certain $y \in X$ car y est (la seule) valeur d'adhérence de la suite (x_{n_p}) où $x_{n_p} \in X_{n_p}$; on peut à nouveau compléter la suite des x_n pour $n_p \leq n \leq n_{p+1}$, il suffit de prendre un point quelconque de X_n .

En sommant les distances, on obtient que $d(x, y) < \varepsilon$ donc $x \in \mathcal{V}_\varepsilon(X)$, par suite on a l'inclusion $X_n \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X)$.

X est non vide, car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X_n \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X)$.

La suite de Cauchy $\{X_n\}$ converge donc vers $X \in K(E)$ au sens de Hausdorff,

$d_{\mathcal{H}}(X_n, X) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc $(K(E), d_{\mathcal{H}})$ est complet.

Théorème 2.1.4 Soient S_1, \dots, S_m des contractions sur un fermé $D \subset \mathbb{R}^n$ qui contient leurs points fixes.

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad \forall x, y \in D$$

avec $c_i < 1$ pour tout i . Alors il existe un unique ensemble compact non-vide F qui est invariant pour les applications S_i

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

De plus si on définit une transformation S sur l'ensemble $K(D)$ des ensembles compacts non-vides de D par

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E) \quad \text{pour } E \in K(D)$$

et que l'on note S^k la k -ième composition par S donnée par

$S^0(E) = E, S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ pour $k \geq 1$, alors

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

pour tout ensemble $E \in K(D)$ tel que $S_i(E) \subset E$ pour chaque i .

Démonstration Comme D est un fermé de \mathbb{R}^n qui est complet, D est aussi complet, donc d'après la proposition 2.1.3, $K(D)$ est un espace métrique complet. L'application S définie dans le théorème est contractante, donc d'après le théorème du point fixe, il existe un unique ensemble $F \in K(D)$ tel que

$$F = S(F) = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

Donc F est invariant par les transformations S_i .

Pour la deuxième partie, remarquons que les ensembles dans $K(D)$ sont transformés par S en d'autres ensembles de $K(D)$. Soit E un ensemble de $K(D)$ tel que $S_i(E) \subset E \forall i$ par exemple le compact $E = D \cap B_r(0)$ convient pour un rayon r suffisant.

Alors $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$ donc $\{S^k(E)\}_{k \geq 1}$ est une suite décroissante d'ensembles compacts non-vides, qui admet comme intersection $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$, car c'est le seul point fixe de S .

La suite des ensembles $S^k(E)$ converge vers F pour tout ensemble compact initial E de $K(D)$ dans le sens que $d_{\mathcal{H}}(S^k(E), F) \rightarrow 0$.

En effet, $d_{\mathcal{H}}(S(E), F) = d_{\mathcal{H}}(S(E), S(F)) \leq c d_{\mathcal{H}}(E, F)$, ainsi $d_{\mathcal{H}}(S^k(E), F) \leq c^k d_{\mathcal{H}}(E, F)$ où $c = \max_{1 \leq i \leq m} c_i < 1$.

Les ensembles $S^k(E)$ donnent donc de bonnes approximations de F quand k croît.

Les résultats suivants rendent le calcul de dimensions très facile, il suffit de reconnaître les rapports des parties similaires de la fractale pour obtenir la dimension de Hausdorff et la dimension boîte. Pour une démonstration, se référer à [1]; elle repose sur des minoration obtenues en utilisant la théorie de la mesure.

Théorème 2.1.5 Soient S_i des similarités de rapports c_i , $i = 1, \dots, m$. S'il existe un ensemble non-vide ouvert et borné V tel que

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V)$$

avec l'union disjointe, alors pour l'ensemble invariant F vérifiant

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

on a $\dim_H(F) = \dim_B(F) = s$ où le nombre s est solution de l'équation

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$$

De plus, pour cette valeur de s , on a $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

La démonstration consiste à montrer que, pour le nombre s en question on a $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, puis que $\overline{\dim}_B(F) \leq s$, ainsi en écrivant

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \mathcal{H}^s(F) \sum_{i=1}^m c_i^s$$

on peut simplifier par $\mathcal{H}^s(F)$ et on obtient que s est la dimension de Hausdorff et la dimension boîte de F .

On obtient également des variantes si les transformations ne sont que des contractions.

Proposition 2.1.6 Soient S_1, \dots, S_m des contractions sur un ensemble fermé $D \subset \mathbb{R}^n$ telles que

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad x, y \in D$$

avec $c_i < 1$ pour chaque i . Supposons que F est invariant pour les $S_i : F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$. Alors $\dim_H(F) \leq s$ et $\overline{\dim}_B(F) \leq s$ où $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$.

Si les composants $S_i(F)$ de F sont disjoints, alors F doit être totalement discontinu et on obtient la majoration suivante.

Proposition 2.1.7 Soient S_1, \dots, S_m des contractions sur un ensemble fermé $D \subset \mathbb{R}^n$ telles que

$$b_i |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \quad x, y \in D$$

avec $0 < b_i < 1$ pour chaque i . Supposons que F est invariant pour les $S_i : F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ avec la réunion disjointe. Alors $\dim_H(F) \geq s$ où $\sum_{i=1}^m b_i^s = 1$.

2.2 Exemple avec le triangle de Sierpinski

Illustrons ce théorème avec le triangle de Sierpinski S de l'exemple 1.4.3. S est « invariant » par trois homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et de centres les sommets du triangle. Par construction, le triangle de Sierpinski S s'écrit

$$S = \bigcap_{k=0}^{\infty} T_k$$

où T_k est la figure obtenue à la k -ième étape dans la construction de S à partir de T_0 le triangle équilatéral initial de sommets A , B et C avec le segment $[0, 1]$ pour base BC .

La figure 4 représente T_i , $i = 1, \dots, 6$

Soient h_1 , h_2 et h_3 les homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et de centres respectifs A , B et C . Alors

$$S = \bigcup_{i=1}^3 h_i(S)$$

En effet, une homothétie préservant les angles et les rapports entre longueurs, l'image d'un triangle est un triangle, donc à chaque étape on a

$$T_k = \bigcup_{i=1}^3 h_i(T_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La continuité des homothéties entraîne le résultat. Pour ensemble V , on peut choisir le triangle ouvert initial, on retrouve alors la dimension de Hausdorff et la dimension boîte de S , $s = \dim_H(S) = \dim_B(S)$ vérifie $3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 \iff s = \frac{\log 3}{\log 2}$.

On peut aussi dessiner le triangle de Sierpinski grâce à un algorithme probabiliste. On fixe le triangle équilatéral de départ et on choisit au hasard un point du plan. Par itération pour obtenir le point suivant, on choisit au hasard l'un des trois sommets du triangle (l'une des trois homothéties), et le point suivant est le milieu du segment reliant le sommet choisi au point précédent. Par continuité des homothéties, le processus aléatoire donne une figure proche du triangle de Sierpinski S : la distance entre le point itéré et S diminue car le point se rapproche des sommets puisque les homothéties sont de rapport plus petits que 1 et les sommets appartiennent à S .

Voici une procédure en Maple pour cet algorithme et le résultat pour 10000 itérations.

```
>Triangle:=proc(n::integer,sommet::list)
```

```
  local i,image,X,Y,r;
  X[1]:=random[uniform]()*100;
  Y[1]:=random[uniform]()*100;
  for i from 2 to n do
  r:=rand(1..3)();
  X[i]:=(X[i-1]+sommet[r][1])/2;
  Y[i]:=(Y[i-1]+sommet[r][2])/2;
  end do;
  image:={seq([X[i],Y[i]],i=1..n)};
  pointplot(image,color=blue);
end proc;
```

```
> Extr:=[[0,0],[50,50*sqrt(3)],[100,0]];
```

```
      Extr := [[0, 0], [50, 50 sqrt(3)], [100, 0]]
```

```
>Triangle(10000,Extr);
```

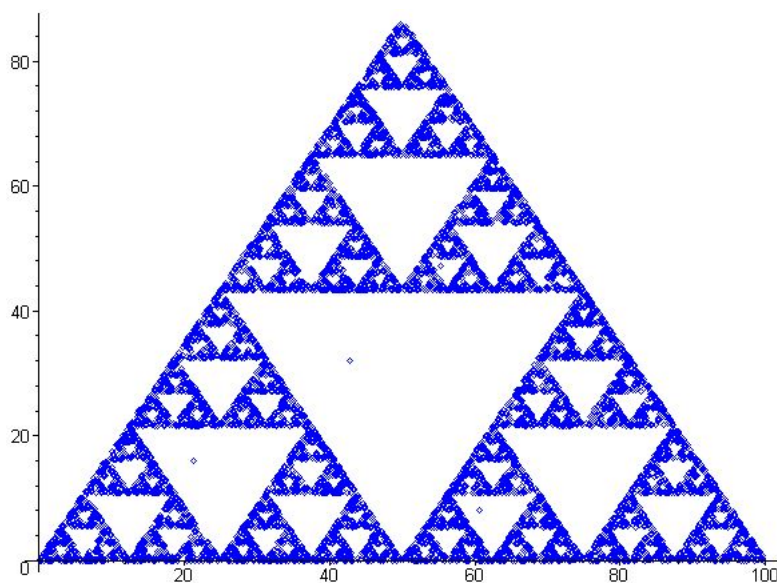


FIG. 6 – Le résultat au bout de 10000 itérations

2.3 Généralisation à d'autres IFS

Pour obtenir une fractale IFS, on choisit un motif de départ et des similarités, souvent des similitudes, qui toutes envoient le motif sur leur centre en une version réduite en fonction de leur rapport. On recommence l'opération avec la nouvelle figure obtenue. En pratique, on remplace chaque segment du motif par une version réduite du motif. On recommence le processus sur chaque segment obtenu. Quelques itérations donnent une bonne idée de la fractale.

Voici un exemple en partant d'une croix, avec deux homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre les extrémités horizontales et de deux similitudes de rapport $\frac{3}{16}$, de centre les quarts du segments vertical et d'angle $\frac{\pi}{4}$. La croix au début est le motif initial.

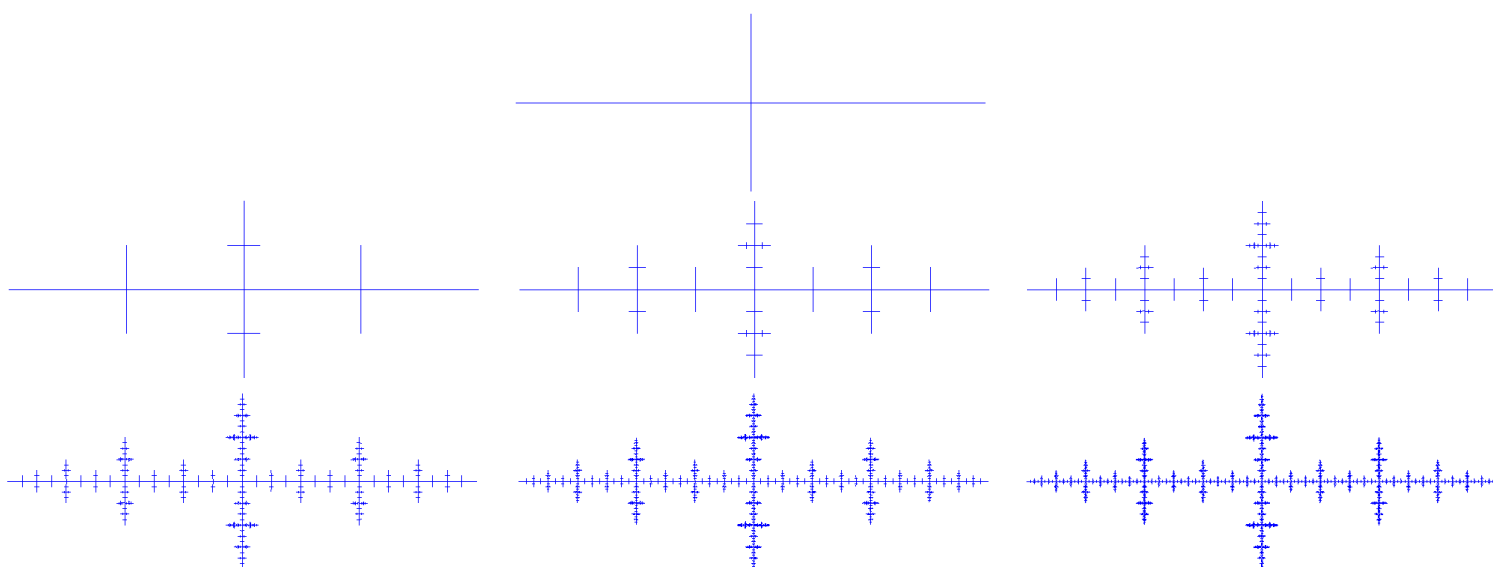


FIG. 7 – Premières approximations d'un IFS en forme de croix

La dimension fractale s de cette croix vérifie l'équation

$$2 \left(\frac{1}{2} \right)^s + 2 \left(\frac{3}{16} \right)^s = 1 \iff \left(\frac{1}{2} \right)^s + \left(\frac{3}{16} \right)^s = \frac{1}{2}$$

On trouve $s = 1,3425\dots$

Les IFS peuvent donner des images très réalistes d'objets naturels comme des arbres ou des feuilles. On obtient par exemple une feuille d'érable en partant d'un segment vertical, avec trois similitudes, de centres la moitié, l'extrémité haute et le quart haut du segment, de rapports $\frac{1}{2}$ et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$, 0 et $-\frac{\pi}{4}$. La première image est le motif initial.

Comme la dimension de Hausdorff et la dimension boîte sont invariantes par rotation, seuls les rapports des similitudes sont pris en compte dans le calcul.

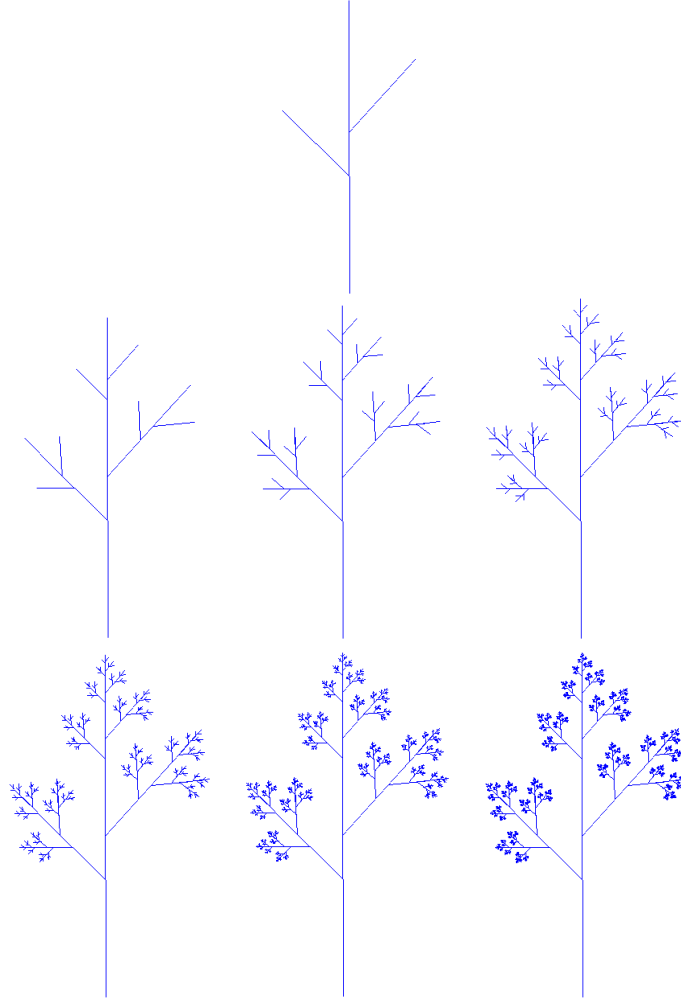


FIG. 8 – Premières approximations d'un IFS en forme de feuille d'érable

La dimension fractale s de la feuille d'érable vérifie l'équation

$$3 \left(\frac{1}{2} \right)^s = 1 \iff s = \frac{\log 3}{\log 2}$$

3 Itération de fonctions complexes

Pour une fonction continue f donnée, on s'intéresse au comportement des itérés $f^k(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$, c'est à dire à la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(z)$. Il y a différents cas de figures, z peut être un point fixe de f , $f(z) = z$ et $f^k(z) = z \forall k \in \mathbb{N}$, ou un point périodique, $\exists p \geq 2$, $f^p(z) = z$ et donc $f^{kp}(z) = z \forall k \in \mathbb{N}$. La suite $f^k(z)$ peut aussi converger vers un point fixe ou une orbite d'un point p -périodique, $\{w, f(w), \dots, f^{p-1}(w)\}$ où p est le plus petit entier tel que $f^p(w) = w$, dans le sens que $|f^k(z) - f^i(w)| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Si f est dérivable au sens complexe, la valeur de la dérivée en un point périodique w joue un rôle important dans le comportement de la suite $\{f^k(z)\}_{k \geq 1}$ pour z au voisinage de w . Soit w un point p -périodique de f . C'est un *point attractif* si $0 \leq |(f^p)'(w)| < 1$ et un *point répulsif* si $|(f^p)'(w)| > 1$.

3.1 Généralités sur les ensembles de Julia

On travaille maintenant avec une fonction polynômiale $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de degré $n \geq 2$.

Définition 3.1.1 *L'ensemble de Julia de f , noté $J(f)$ (ou J s'il n'y a pas d'ambiguïté) est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de f .*

L'exemple le plus simple est de considérer la fonction $f(z) = z^2$, ainsi $f^k(z) = z^{2^k}$. Les points p -périodiques de f vérifient

$$f^p(z) = z \iff z \in \{e^{\frac{2i\pi k}{2^p-1}}, 0 \leq k \leq 2^p - 2\}$$

Ce sont des points répulsifs, car pour un tel z , $|(f^p)'(z)| = 2^p > 1$. L'ensemble de Julia $J(f)$ est donc le cercle unité $|z| = 1$.

De plus $J(f) = f(J) = f^{-1}(J)$ et $f^k(z) \rightarrow 0$ si $|z| < 1$ et $f^k(z) \rightarrow \infty$ si $|z| > 1$. L'ensemble de Julia $J(f)$ est la frontière entre les points qui sont itérés vers 0 et ∞ .

Dans ce cas particulier, le cercle obtenu ne présente pas de structure fractale, mais il suffit de modifier légèrement la fonction initiale en $f(z) = z^2 + c$ où $c \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe de petit module. Comme précédemment, $f^k(z) \rightarrow w$ si $|z|$ est petit, où w est le point fixe de f proche de 0, et $f^k(z) \rightarrow \infty$ si $|z|$ est grand.

L'ensemble de Julia est à nouveau la frontière entre ces deux comportements, mais cette fois, $J(f)$ est une courbe fractale.

Pour démontrer ces affirmations, on va commencer par établir quelques propriétés sur les ensembles de Julia pour des fonctions polynômiales de degré $n \geq 2$.

Définition 3.1.2 *Soit U un ouvert de \mathbb{C} et soit $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ une famille de fonctions analytiques. La famille $\{g_k\}$ est dite normale sur U si toute suite extraite de $\{g_k\}$ admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de U soit vers une fonction analytique bornée, soit vers ∞ .*

La famille $\{g_k\}$ est normale au point w s'il existe un ouvert V de U contenant w tel que $\{g_k\}$ est une famille normale sur V .

On pose

$$J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que la famille } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ n'est pas normale en } z\}$$

On va montrer que pour une fonction polynômiale f , on a $J(f) = J_0(f)$.

On admettra le théorème de Montel qui suit

Théorème 3.1.3 (Montel) *Soit $\{g_k\}$ une famille de fonctions analytiques complexes sur un ouvert U . Si $\{g_k\}$ n'est pas une famille normale, alors pour tout nombre $w \in \mathbb{C}$ sauf peut-être un, il existe $z \in U$ tel que $g_k(z) = w$ pour un certain k .*

Proposition 3.1.4 *Si f est un polynôme, alors $J_0(f)$ est compact.*

Démonstration On voit immédiatement que le complément

$$\begin{aligned} F_0(f) &\equiv \mathbb{C} \setminus J_0(f) \\ &= \{z \in \mathbb{C} \text{ tel qu'il existe un ouvert } V \text{ avec} \\ &\quad z \in V \text{ et } \{f^k\} \text{ est normale en } z\} \end{aligned}$$

est un ouvert, donc $J_0(f)$ est fermé.

Comme $\deg(f) \geq 2$, on peut trouver r tel que $|f(z)| \geq 2|z|$ si $|z| \geq r$ d'où $|f^k(z)| > 2^{kr}$ si $|z| > r$. Ainsi, $f^k(z) \rightarrow \infty$ uniformément sur l'ouvert $V = \{|z| > r\}$. Par définition, $\{f^k\}$ est normale sur V , donc $V \subset \mathbb{C} \setminus J_0(f)$.

On obtient alors que $J_0(f)$ est borné, et par suite compact.

Proposition 3.1.5 *$J_0(f)$ est non vide.*

Démonstration Supposons que $J_0(f) = \emptyset$. Alors, pour chaque $r > 0$, la famille $\{f^k\}$ est normale sur le disque ouvert $B_r^o(0)$ de centre l'origine et de rayon r . Comme f est un polynôme, on peut choisir r assez grand pour que $B_r^o(0)$ contienne un point z pour lequel $|f^k(z)| \rightarrow \infty$ et également un point fixe w pour f , avec $f^k(w) = w \forall k \in \mathbb{N}$. Une sous-suite de $\{f^k\}$ ne peut alors pas converger uniformément soit vers une fonction analytique bornée soit vers ∞ sur tout compact de $B_r^o(0)$ qui contient à la fois z et w , ce qui contredit la normalité de $\{f^k\}$.

Proposition 3.1.6 *$J_0(f)$ est invariant par f et $f^{-1} : J_0 = f(J_0) = f^{-1}(J_0)$.*

Démonstration Il est équivalent de montrer que le complément $F_0(f)$ est invariant. Soit V un ouvert avec $\{f^k\}$ normale sur V . Comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un ouvert. Soit $\{f^{k_i}\}$ une sous-suite de $\{f^k\}$. Alors $\{f^{k_i+1}\}$ admet une sous-suite $\{f^{k'_i+1}\}$ uniformément convergente sur les compacts de V . Si D est un compact de $f^{-1}(V)$, alors $\{f^{k'_i+1}\}$ converge uniformément sur $f(D)$, donc $\{f^{k'_i}\}$ converge uniformément sur D . Ainsi, $\{f^k\}$ est normale sur $f^{-1}(V)$, donc $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$ et $f(F_0) \subset F_0$. Les deux autres inclusions s'obtiennent de la même manière, en utilisant que f est une application ouverte, i.e. $f(V)$ est ouvert si V est ouvert.

Proposition 3.1.7 *$J_0(f^p) = J_0(f)$ pour tout entier positif p .*

Démonstration On travaille à nouveau avec le complémentaire F_0 . Si chaque suite extraite de $\{f^k\}$ admet une sous-suite uniformément convergente sur un ensemble donné, c'est aussi vrai pour $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$. Donc $F_0(f) \subset F_0(f^p)$.

Si D est un compact et $\{g_k\}$ une famille convergeant uniformément sur D vers une fonction bornée ou vers ∞ , il en est de même pour $\{h \circ g_k\}$ pour tout polynôme h . Ainsi, si $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$ est normale sur un ouvert V , $\{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$ l'est aussi, pour $r = 0, \dots, p-1$. Mais toute suite extraite de $\{f^k\}_{k \geq 1}$ contient une infinité de termes de la suite $\{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$ pour un entier r avec $0 \leq r \leq p-1$, qui admet une sous-suite uniformément convergente sur les compacts de V . Donc $\{f^k\}$ est normal, et $F_0(f) \supset F_0(f^p)$.

Lemme 3.1.8 *Soit f un polynôme, et soient $w \in J_0(f)$ et U un voisinage de w . Alors $W \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ est \mathbb{C} tout entier, sauf peut-être un point. Un tel point exceptionnel n'est pas dans $J_0(f)$, et est indépendant de w et de U .*

Démonstration Par définition de J_0 , la famille $\{f^k\}$ n'est pas normale en w , la première partie découle donc du théorème de Montel 3.1.3.

Supposons que $v \notin W$. Si $f(z) = v$, comme $f(W) \subset W$, on obtient que $z \notin W$. Comme $\mathbb{C} \setminus W$ est au plus un seul point, $z = v$. Donc f est un polynôme de degré n tel que la seule solution de $f(z) - v = 0$ est v , ce qui entraîne que $f(z) - v = c(z - v)^n$ pour une constante c .

Si z est suffisamment proche de v , alors $f^k(z) - v \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, la convergence étant uniforme sur $\{z \in \mathbb{C}, |z - v| < (2c)^{-1/(n-1)}\}$. Donc $\{f^k\}$ est normale en v et le point exceptionnel $v \notin J_0(f)$ ne dépend que de f .

Corollaire 3.1.9 (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ sauf peut-être un, si U est un ouvert intersectant $J_0(f)$, alors $f^{-k}(z)$ intersecte U pour une infinité de valeurs de k .

(b) Si $z \in J_0(f)$ alors $J_0(f)$ est l'adhérence de l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$

Démonstration

(a) Si z n'est pas le point exceptionnel du lemme 3.1.8, $z \in f^k(U)$ donc $f^{-k}(z)$ intersecte U pour un certain k . En répétant le même argument, on obtient une infinité de nombres k avec $f^{-k}(z)$ intersectant U .

(b) Si $z \in J_0(f)$, alors $f^{-k}(z) \subset J_0(f)$ par la proposition 3.1.6, donc $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ et son adhérence sont contenus dans l'ensemble fermé $J_0(f)$. D'autre part, si U est un ouvert contenant un point $w \in J_0(f)$, alors $f^{-k}(z)$ intersecte U pour un certain k d'après la partie (a), z ne pouvant être le point exceptionnel par le lemme 3.1.8.

Corollaire 3.1.10 Si f est un polynôme, $J_0(f)$ est d'intérieur vide.

Supposons que $J_0(f)$ contienne un ouvert U . Alors $J_0(f) \supset f^k(U) \forall k$ par la proposition 3.1.6, donc $J_0(f) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$. D'après le lemme 3.1.8, $J_0(f)$ est \mathbb{C} tout entier, sauf éventuellement un point, ce qui contredit la proposition 3.1.4, disant que $J_0(f)$ est borné.

Proposition 3.1.11 $J_0(f)$ est un ensemble parfait, i.e. fermé et sans points isolés, et est donc indénombrable.

Démonstration Soient $v \in J_0(f)$ et U un voisinage de v . Il faut montrer que U contient d'autres points de $J_0(f)$. On considère trois cas séparément.

(i) v n'est pas un point fixe ou périodique de f . Par le corollaire 3.1.9 (b) et la proposition 3.1.6, comme $U \cap J_0(f) \neq \emptyset$, $\exists k \geq 1$, $U \cap f^{-k}(v) \neq \emptyset$, donc U contient un point de $f^{-k}(v) \subset J_0(f)$ différent de v car v n'est pas un point fixe ou périodique.

(ii) $f(v) = v$. Si $f(z) = v$ n'a pas d'autre solution que v , alors comme dans la démonstration du lemme 3.1.8, $v \notin J_0(f)$. Il existe donc un point $w \neq v$ avec $f(w) = v$. Par le corollaire 3.1.9 (b), U contient un point de $f^{-k}(w)$ pour un $k \geq 1$. Un tel point appartient à $J_0(f)$ par invariance par f^{-1} et est différent de v car $f^k(v) = v$.

(iii) $f^p(v) = v$ pour un $p > 1$. Par la proposition 3.1.7, $J_0(f) = J_0(f^p)$, donc en appliquant (ii) à f^p , on voit que U contient d'autres points de $J_0(f^p) = J_0(f)$ que v .

Ainsi, $J_0(f)$ n'a pas de points isolés, comme il est fermé, il est parfait.

On peut maintenant montrer le résultat principal de cette section, que $J_0(f)$, l'ensemble des points de non-normalité de la famille $\{f^k\}$ et le même que $J(f)$, l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de f .

Théorème 3.1.12 *Si f est un polynôme, alors $J_0(f) = J(f)$.*

Démonstration Soit w un point répulsif de f de période p , donc w est un point fixe répulsif de $g = f^p$. Supposons que $\{g^k\}$ est normale en w ; alors w possède un voisinage ouvert V sur lequel une sous-suite $\{g^{k_i}\}$ converge uniformément vers une fonction analytique finie g_0 (elle ne peut converger vers ∞ car $g^k(w) = w \forall k$). Comme g est analytique, la dérivée converge également $(g^{k_i})'(z) \rightarrow g_0'(z)$ si $z \in V$. Or la formule de dérivation d'une composée donne que $|(g^{k_i})'(w)| = |(g'(w))^{k_i}| \rightarrow \infty$ car w est un point fixe répulsif, $|g'(w)| > 1$. Ceci contredit la finitude de $g_0'(w)$, donc $\{g^k\}$ ne peut être normale en w . Ainsi $w \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$ par la proposition 3.1.7. De plus, $J_0(f)$ est fermé, donc $J(f) \subset J_0(f)$.

Soit $K = \{w \in J_0(f) \text{ tel qu'il existe } z \neq w \text{ avec } f(z) = w \text{ et } f'(z) \neq 0\}$. Supposons que $w \in K$. Il existe alors un voisinage ouvert V de w sur lequel on peut trouver localement une inverse analytique $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$ tel que $f(f^{-1}(z)) = z$ pour $z \in V$. Définissons une famille de fonctions analytiques $\{h_k\}$ sur V par

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$$

Soit U un voisinage ouvert de w avec $U \subset V$. Comme $w \in J_0(f)$, la famille $\{f^k\}$ et donc par définition, la famille $\{h_k\}$ n'est pas normale sur U . Par le théorème de Montel 3.1.3, $h_k(z)$ doit prendre la valeur 0 ou 1 pour un certain k et $z \in U$. Dans le premier cas, $f^k(z) = z$ pour un $z \in U$; dans le second cas, $f^k(z) = f^{-1}(z)$ donc $f^{k+1}(z) = z$ pour un $z \in U$. Donc U contient un point périodique de f , d'où $w \in J(f)$.

On a montré que $K \subset J(f)$ en prenant l'adhérence $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$. De plus K contient tous les points de $J_0(f)$ sauf un nombre fini. Comme $J_0(f)$ ne contient pas de point isolé par la proposition 3.1.11 $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$ comme demandé.

Définition 3.1.13 *Soit w un point attractif de f . On définit*

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C}, f^k(z) \rightarrow w \text{ quand } k \rightarrow \infty\}$$

le bassin d'attraction de w .

On définit de la même façon le bassin d'attraction de l'infini, $A(\infty)$.

Comme w est un point attractif, il y a un ouvert V contenant w dans $A(w)$ (si $w = \infty$, on peut prendre $\{|z| > r\}$, pour r assez grand). Par suite, $A(w)$ est ouvert car si $f^k(z) \in V$ pour un k , alors $z \in f^{-k}(V)$ qui est ouvert.

La caractérisation suivante de J comme la frontière de tout bassin d'attraction est très utile pour déterminer des ensembles de Julia. On utilise la notation ∂A pour la frontière de l'ensemble A .

Proposition 3.1.14 *Soit w un point fixe attractif de f . Alors $\partial A(w) = J(f)$. C'est encore vrai pour $w = \infty$.*

Démonstration Si $z \in J(f)$ alors $f^k(z) \in J(f)$ pour tout k et ne peut pas converger vers un point fixe attractif, donc $z \notin A(w)$. Toutefois, si U est un voisinage de z , l'ensemble

$f^k(U)$ contient des points de $A(w)$ pour un certain k par le lemme [3.1.8](#), donc il y a des points arbitrairement proches de z qui sont itérés sur w . Donc $z \in A(w)$ et $z \in \partial A(w)$. Supposons que $z \in \partial A(w)$ mais $z \notin J(f) = J_0(f)$. Alors z a un voisinage ouvert connexe V sur lequel $\{f^k\}$ admet une sous-suite convergente soit vers une fonction analytique, soit vers ∞ . Cette sous-suite converge vers w sur $V \cap A(w)$, qui est ouvert et non-vide, et donc sur V , car une fonction analytique est constante sur un connexe si elle est constante sur tout ouvert. Tout les points de V sont envoyés sur $A(w)$ par des itérés de f , donc $V \subset A(w)$ ce qui contredit $z \in \partial A(w)$.

Avec l'exemple $f(z) = z^2$, on retrouve pour ensemble de Julia le cerle unité, qui est la frontière de $A(0)$ et de $A(\infty)$.

Une autre point de vue qui a été écarté ici est d'étudier la dynamique de f sur l'ensemble de Julia, on peut montrer que f agit chaotiquement sur J , c'est-à-dire que les points périodiques de f sont denses dans J , que J contient des points z dont les itérés $f^k(z)$ sont denses dans J et que f est très « sensible aux conditions initiales » sur J , c'est-à-dire que $|f^k(z) - f^k(w)|$ sera grand pour une certaine valeur de k , quelle que soit la proximité entre z et w au départ, empêchant des calculs précis pour de nombreuses itérations.

3.2 Fonctions quadratiques

On va étudier les ensembles de Julia des polynômes de la forme

$$f_c(z) = z^2 + c$$

En choisissant bien α et β et en posant $h(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha \neq 0$, on peut obtenir n'importe quelle fonction quadratique f en conjuguant f_c avec h

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = \frac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha}$$

Comme h est une similitude, l'ensemble de Julia de toute fonction quadratique f présente la même structure que celui de f_c pour un certain $c \in \mathbb{C}$.

Pour inverser la fonction f_c en un point $z \neq c$, on utilisera la détermination principale de la racine carré pour obtenir les valeurs $\pm(z - c)^{1/2}$, appelées les deux *branches* de $f_c^{-1}(z)$. On désignera ici par *lacet* une courbe fermée, de classe C^1 et simple, c'est à dire sans point d'auto-intersection. Le terme *huît* sera utilisé pour une courbe fermée de classe C^1 , avec un unique point d'auto-intersection.

Définition 3.2.1 *On définit l'ensemble de Mandelbrot M comme l'ensemble des paramètres c pour lesquels l'ensemble de Julia de f_c est connexe*

$$M = \{c \in \mathbb{C}, J(f_c) \text{ est connexe}\}$$

Cette définition n'est pas très pratique, on en obtient une autre en utilisant le lemme suivant.

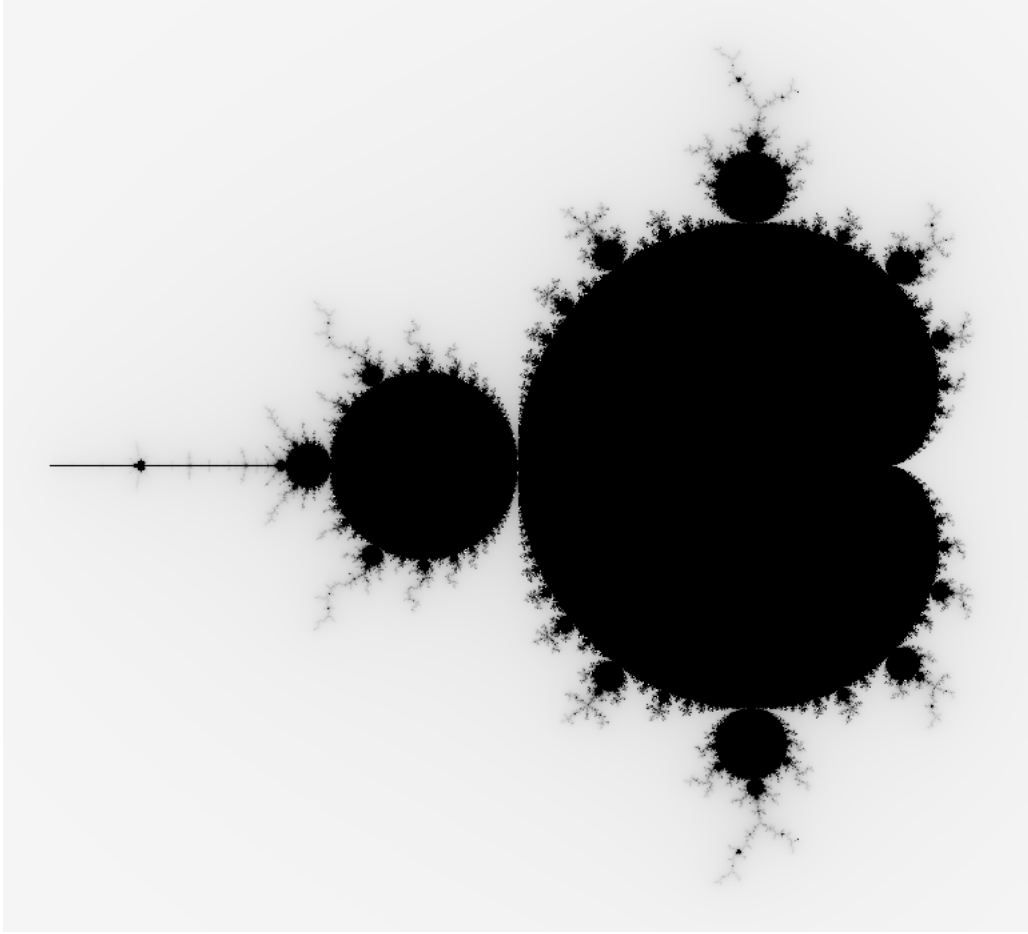


FIG. 9 – Ensemble de Mandelbrot

Lemme 3.2.2 *Soit C un lacet dans le plan complexe.*

(a) *Si c est à l'intérieur de C , alors $f_c^{-1}(C)$ est un lacet, dont l'intérieur est l'image réciproque de l'intérieur de C .*

(b) *Si c est un point de C , alors $f_c^{-1}(C)$ est un huit, et l'image réciproque de l'intérieur de C est l'intérieur des deux lacets.*

Démonstration Formellement, on a $f_c^{-1}(z) = (z - c)^{1/2}$ et $(f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-1/2}$ qui est fini et non-nul si $z \neq c$. Ainsi, si on choisit une des branches de f_c^{-1} , l'ensemble $f_c^{-1}(C)$ est localement une courbe de classe C^1 , si l'on s'assure que $c \notin C$.

(a) Supposons que c est à l'intérieur de C . Prenons un point initial w sur C et choisissons l'une des deux valeurs $f_c^{-1}(w)$. En faisant varier continûment $f_c^{-1}(z)$ quand z décrit C , le point $f_c^{-1}(z)$ trace une courbe de classe C^1 . Quand z retourne en w , $f_c^{-1}(w)$ prend sa seconde valeur. Si z reparcourt C encore une fois, $f_c^{-1}(z)$ continue à décrire une courbe C^1 , qui se referme quand z retourne en w pour la seconde fois. Comme $c \notin C$, on a $0 \notin f_c^{-1}(C)$, donc $f_c'(z) \neq 0$ sur $f_c^{-1}(C)$. L'application f_c est donc localement une bijection de classe C^1 , au voisinage des points de $f_c^{-1}(C)$. En particulier, $z \in f_c^{-1}(C)$ ne peut être un point d'auto-intersection de $f_c^{-1}(C)$, sinon $f_c(z)$ serait un point d'auto-intersection de C .

Comme f_c est une application continue qui envoie le lacet $f_c^{-1}(C)$, et aucun autre point, sur le lacet C , le polynôme f_c doit aussi envoyer respectivement l'intérieur et l'extérieur

de $f_c^{-1}(C)$ sur l'intérieur et l'extérieur de C . Les deux branches de f_c^{-1} font donc correspondre l'intérieur de C avec l'intérieur de $f_c^{-1}(C)$.

(b) On le prouve d'une manière similaire à (a), en remarquant que si C_0 est un arc de courbe de classe C^1 passant par c , alors $f_c^{-1}(C_0)$ consiste en deux arcs de courbes passant par 0, qui s'intersectent à angles droits, ce qui donne le point d'auto-intersection et le huit.

On obtient une caractérisation de l'ensemble de Mandelbrot en terme d'itérés de f_c .

Théorème 3.2.3

$$\begin{aligned} M &= \{c \in \mathbb{C}, \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ est borné}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C}, f_c^k(0) \not\rightarrow \infty \text{ quand } k \rightarrow \infty\} \end{aligned}$$

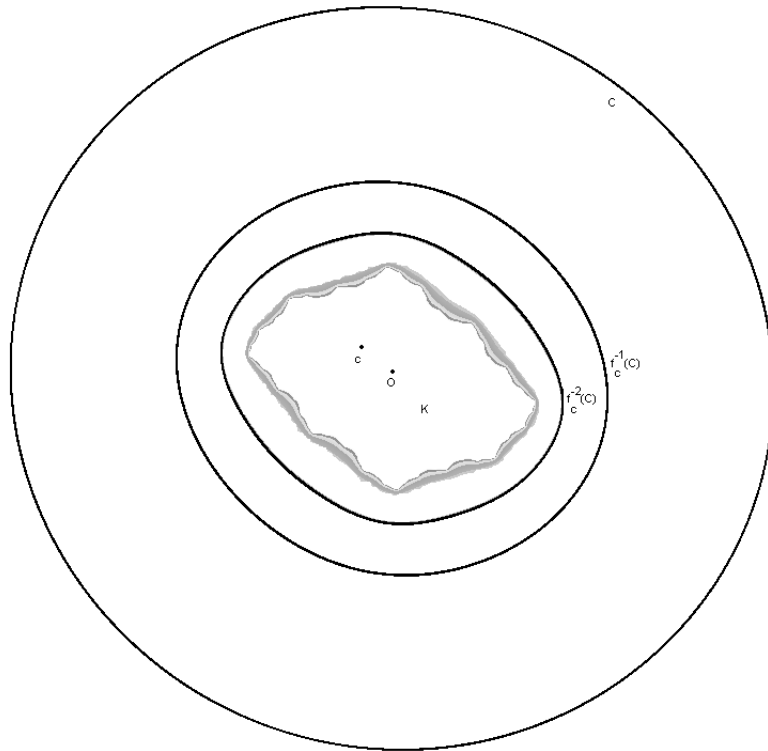
Démonstration Comme il existe r tel que $|f_c(z)| > 2|z|$ si $|z| > r$, il est clair que $f_c^k(0) \not\rightarrow \infty$ si, et seulement si $\{f_c^k(0)\}$ est borné, ainsi les deux ensembles du théorème sont égaux.

(a) On montre d'abord que si $\{f_c^k(0)\}$ est borné, alors $J(f_c)$ est connexe. Soit C un cercle dans \mathbb{C} centré à l'origine, assez grand pour que tous les points $\{f_c^k(0)\}$ soient à l'intérieur de C , pour que $f_c^{-1}(C)$ soit intérieur à C et tel que les points à l'extérieur de C soit itérés vers ∞ par f_c . Comme $c = f_c(0)$ est à l'intérieur de C , le lemme 3.2.2(a) donne que $f_c^{-1}(C)$ est un lacet contenu dans l'intérieur de C . De même, $f_c(c) = f_c^2(0)$ est à l'intérieur de C et f_c^{-1} envoie l'extérieur de C sur l'extérieur de $f_c^{-1}(C)$, donc c est à l'intérieur de $f_c^{-1}(C)$. Donc $f_c^{-2}(C)$ est un lacet contenu dans l'intérieur de $f_c^{-1}(C)$. En continuant ainsi, $\{f_c^{-k}(C)\}$ consiste en une suite de lacets, chacun contenant le suivant dans son intérieur. Soit K l'ensemble fermé des points qui sont à l'intérieur ou sur les lacets $f_c^{-k}(C)$ pour tout k . Si $z \in \mathbb{C} \setminus K$, un certain itéré $f_c^k(z)$ sera à l'extérieur de C et donc $f_c^k(z) \rightarrow \infty$. Ainsi

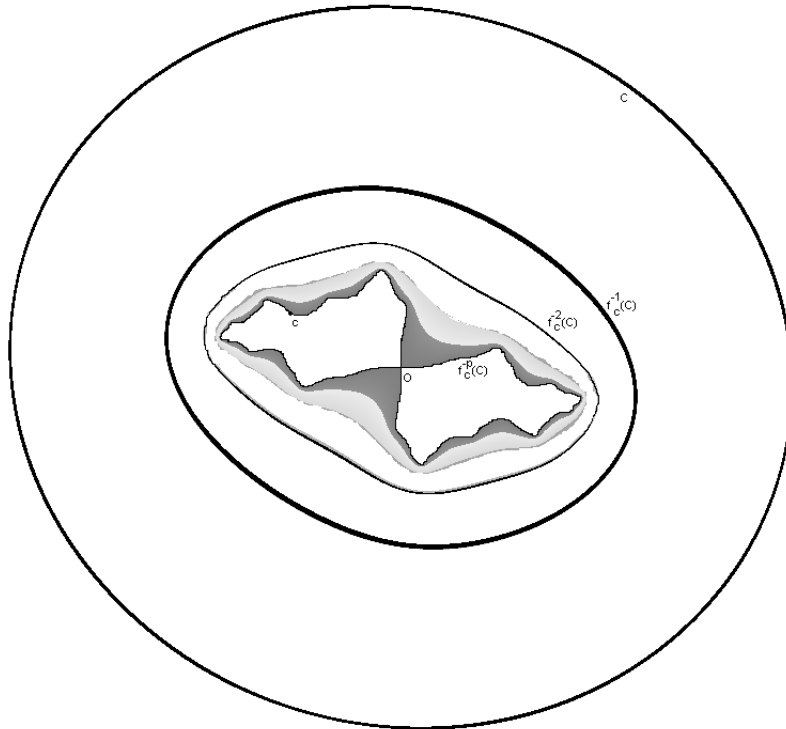
$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C}, \lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(z) = \infty\} = \mathbb{C} \setminus K$$

D'après la proposition 3.1.14, $J(f_c)$ est la frontière de $\mathbb{C} \setminus K$, qui est bien sûr aussi la frontière de K . Mais K est l'intersection d'une suite décroissante de fermés simplement connexes, donc K est simplement connexe et sa frontière est donc aussi connexe. Donc $J(f_c)$ est connexe.

(b) On montre de manière similaire que $J(f_c)$ n'est pas connexe si $\{f_c^k(0)\}$ n'est pas borné. Soit C un cercle assez grand pour que $f_c^{-1}(C)$ soit à l'intérieur de C , que tous les points à l'extérieur de C s'itérent vers ∞ , et tel que pour un certain p , le point $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$ avec $f_c^k(0)$ à l'intérieur ou à l'extérieur de C , selon que k est plus petit ou plus grand que p . Comme dans la première partie, on construit une suite d'ensembles $\{f_c^{-k}(C)\}$, chacun contenant le suivant dans son intérieur. Toutefois, l'argument ne tient plus quand on arrive au lacet $f_c^{1-p}(C)$, car $c \in f_c^{1-p}(C)$ et le lemme 3.2.2(a) ne s'applique pas. Par le lemme 3.2.2(b), on obtient que $E \equiv f_c^{-p}(C)$ est un huit à l'intérieur du lacet $f_c^{1-p}(C)$, avec f_c envoyant l'intérieur de chaque moitié de E dans l'intérieur de $f_c^{1-p}(C)$. L'ensemble de Julia $J(f_c)$ doit être à l'intérieur des lacets de E , car les autres points sont itérés vers ∞ . Comme $J(f_c)$ est invariant par f_c^{-1} , des parties de $J(f_c)$ doivent être contenues dans chaque lacet de E . Ainsi, le huit E rend $J(f_c)$ non connexe.



(a)



(b)

FIG. 10 – Images réciproques d'un cercle C par f_c , illustrant les deux parties du théorème 3.2.3 : (a) $c = -0.3 + 0.3i$; (b) $c = -0.9 + 0.6i$

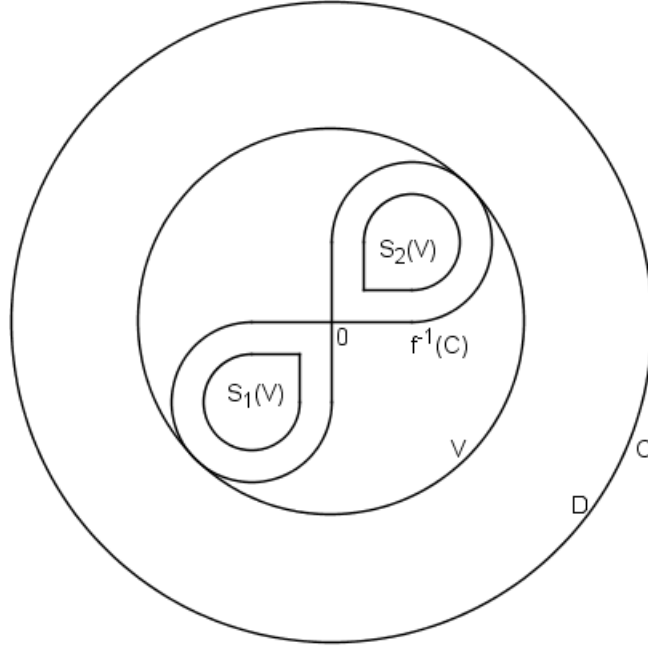


FIG. 11 – Preuve du théorème 3.2.4

La raison pour laquelle on considère les itérés de l'origine est que c'est le point critique de f_c pour tout c , c'est-à-dire le point pour lequel $f'_c(z) = 0$. Les points critiques sont les points où f_c ne peut être une bijection localement, ce qui avait permis de distinguer les deux cas dans la démonstration.

Selon la position du point c par rapport à l'ensemble de Mandelbrot, les ensembles de Julia pour f_c ont diverses formes. Hormis la connexité, on obtient quelques informations supplémentaires suivant les valeurs de c .

Théorème 3.2.4 *Si $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$, alors $J(f_c)$ est totalement discontinu, et est l'ensemble invariant (au sens de 2.1.1) par les contractions données par les deux branches de $f_c^{-1}(z)$ pour z proche de $J(f_c)$. Pour $|c|$ grand, $\dim_B(J(f_c)) = \dim_H(J(f_c)) \sim \frac{2 \log 2}{\log |c|}$.*

Démonstration Soit C le cercle $|z| = |c|$ et D son intérieur $|z| < |c|$. Comme $c \in C$, le lemme 3.2.2 donne que

$$f_c^{-1}(C) = \{(ce^{i\theta} - c)^{1/2}, 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$$

est un huit avec auto-intersection au point 0, les deux lacets formant le huit se coupant à angles droits (voir la figure 11). Comme $|c| > 2$, $\forall 0 \leq \theta \leq 4\pi$, $|ce^{i\theta} - c|^{1/2} \leq \sqrt{2|c|} \leq |c|$, donc $f_c^{-1}(C) \subset D$. L'intérieur de chaque lacet de $f_c^{-1}(C)$ est en bijection avec D . Si on définit $S_1, S_2 : D \rightarrow D$ comme les deux branches de $f_c^{-1}(z)$ à l'intérieur de chaque lacet, alors $S_1(D)$ et $S_2(D)$ sont les intérieurs des deux lacets.

Soit V le cercle $|z| < |2c|^{1/2}$. On a choisi le rayon de V de sorte qu'il contienne juste $f_c^{-1}(z)$, donc $S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D$. Donc $S_1(V), S_2(V) \subset V$ avec $S_1(\bar{V})$ et $S_2(\bar{V})$ disjoints. On a

$$S'_1(z) = S'_2(z) = (f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-1/2}$$

Ainsi, pour $z \in \bar{V}$,

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq |S'_i(z)| \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}$$

Le majorant est plus petit que 1 si $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$, auquel cas S_1 et S_2 sont des contractions sur le disque \bar{V} . D'après le théorème 2.1.5 il existe un unique ensemble invariant, compact et non-vidé $F \subset \bar{V}$ satisfaisant

$$S_1(F) \cup S_2(F) = F$$

Comme $S_1(\bar{V})$ et $S_2(\bar{V})$ sont disjoints, $S_1(F)$ et $S_2(F)$ également donc F est totalement discontinu.

Montrons que $F = J(f_c) = J$. Comme \bar{V} contient au moins un point z de J , on a que $J = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_c^{-k}(z) \subset \bar{V}$, car $f_c^{-k}(\bar{V}) \subset \bar{V}$. En utilisant les résultats de la section 3.1, on obtient que J est un ensemble compact non-vidé de \bar{V} vérifiant $J = f_c^{-1}(J)$ soit $J = S_1(J) \cup S_2(J)$. Donc par unicité, $J = F$.

On estime enfin la dimension de $J(f_c) = F$. Par le théorème des accroissements finis en dimension 2, on a

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{z_1 - z_2} \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}$$

si z_1, z_2 sont des points distincts de \bar{V} . D'après les propositions 2.1.6 et 2.1.7, on obtient des bornes inférieures et supérieures pour $\dim_H(J(f_c))$ par les solutions des équations $2 \left(\frac{1}{2}(|c| \pm |2c|^{1/2})^{-1/2}\right)^s = 1$ soit $s = \frac{2 \log 2}{\log(4(|c| \pm |2c|^{1/2}))}$, ce qui donne l'estimation annoncée.

Passons maintenant au cas où c est petit. Pour $c = 0$, $J(f_c)$ est le cercle unité. Si $c \neq 0$ est assez proche de 0, le cercle qu'on avait se déforme et $J(f_c)$ est une courbe fermée simple (i.e. sans points d'auto-intersection).

Théorème 3.2.5 *Si $|c| < \frac{1}{4}$ alors $J(f_c)$ est une courbe fermée simple.*

Démonstration Soit C_0 le cercle $|z| = \frac{1}{2}$ qui entoure c et le point fixe attractif de f_c , $w = \frac{1}{2}(1 - (1 - 4c)^{1/2})$, où $(1 - 4c)^{1/2}$ est la racine dont la partie réelle est positive. Un calcul immédiat montre que l'image réciproque $f_c^{-1}(C_0)$ est un lacet C_1 entourant C_0 . On note A_1 la couronne entre C_0 et C_1 et on appelle « trajectoire » une courbe quittant C_0 et atteignant C_1 à angle droit (voir figure 12(a)). Pour chaque θ , soit $\psi_1(\theta)$ le point sur C_1 à la fin de la trajectoire quittant C_0 en $\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$. L'image réciproque $f_c^{-1}(A_1)$ est une couronne A_2 de bord extérieure le lacet $C_2 = f_c^{-1}(C_1)$ et de bord intérieur C_1 , avec f_c envoyant surjectivement A_2 sur A_1 , tous les points ayant deux antécédants. Les images réciproques des trajectoires reliant C_0 à C_1 donnent une famille de trajectoires reliant C_1 à C_2 . Soit $\psi_2(\theta)$ le point de C_2 à la fin de la trajectoire quittant C_1 en $\psi_1(\theta)$. On continue de la même façon pour obtenir une suite de lacets C_k , chacun entourant son prédécesseur, et des familles de trajectoires reliant les points $\psi_k(\theta)$ sur C_k à $\psi_{k+1}(\theta)$ sur C_{k+1} pour chaque k .

En faisant tendre $k \rightarrow \infty$, les courbes C_k approchent la frontière du bassin d'attraction de w ; par le lemme 3.1.14, cette frontière n'est autre que l'ensemble de Julia $J(f_c)$. Comme $|f'_c(z)| > \gamma$ pour un certain $\gamma > 1$ à l'extérieur de C_1 , il s'ensuit que les deux branches de

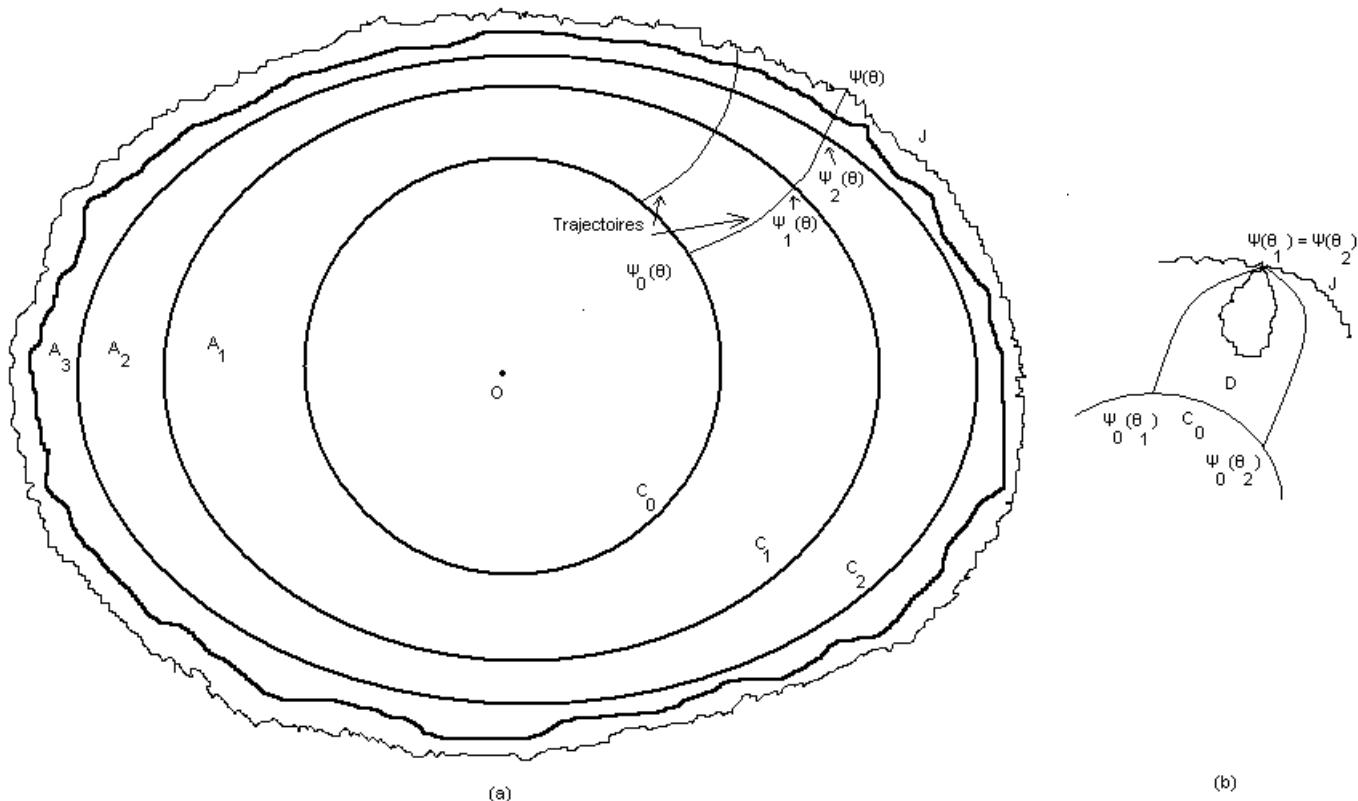


FIG. 12 – Preuve du théorème 3.2.5

f_c^{-1} sont contractantes au voisinage de $J(f_c)$. Ainsi, la longueur de la trajectoire joignant $\psi_k(\theta)$ à $\psi_{k+1}(\theta)$ converge vers 0 quand $k \rightarrow \infty$ à vitesse géométrique. Par conséquent, $\psi_k(\theta)$ converge uniformément vers une fonction continue $\psi(\theta)$ quand $k \rightarrow \infty$, et $J(f_c)$ est la courbe fermée donnée par $\psi(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Reste à montrer que ψ est une courbe simple. Supposons que $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$. Soit D la région délimitée par C_0 et les deux trajectoires joignant $\psi_0(\theta_1)$ et $\psi_0(\theta_2)$ à ce point commun. Le bord de D reste borné par les itérés de f_c , donc d'après le principe du module maximum, D reste aussi borné par les itérés de f_c . D'après le lemme 3.1.8, l'intérieur de D ne peut contenir aucun point de $J(f_c)$. La situation de la figure 12(b) ne peut donc se produire, donc $\psi(\theta) = \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$ pour tout θ entre θ_1 et θ_2 . Il s'ensuit que $\psi(\theta)$ n'a pas de points d'auto-intersection.

Il faudrait ensuite étudier les cas où $\frac{1}{4} < |c| < \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$, mais ils sont plus difficiles car f_c a plusieurs points périodiques et nous ne les traiterons pas. Les cas les plus délicats sont quand c est sur la frontière de l'ensemble de Mandelbrot.

Signalons cependant qu'il existe un résultat affirmant que la frontière de l'ensemble de Mandelbrot est une fractale de dimension de Hausdorff égale à deux, voir [4].

Conclusion

Les fractales sont des objets d'une grande complexité, les fractales de Julia ou de Mandelbrot contiennent des petites copies d'elles mêmes, mais elles sont engendrées par un procédé souvent assez simple. Il n'existe pas vraiment de définition générale pour ces objets, on les reconnaît plutôt à leurs propriétés d'auto-similarité ou comme ensemble chaotique pour une certaine application.

Il y a ainsi une grande variété d'images fractales, où chaque point du plan est colorié en fonction de sa vitesse de convergence ou de divergence, suivant différents algorithmes. Une simple formule de départ peut donner naissance à des centaines d'images rien qu'en faisant varier certains paramètres. De plus certains logiciels permettent de se promener dans une fractale par zoom successifs. Tout cela a donné naissance à de nouvelles formes d'arts graphiques et musicaux.

Références

- [1] K. Falconer – Fractal Geometry, Mathematical Foundations and applications
- [2] R.L. Devaney – Chaotic Dynamical Systems (Second Edition)
- [3] N. Landais – <http://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/nicolas.landais/enseignement.html>
- [4] M. Shishikura – <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/9201282>

Images :

Wikipédia – <http://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil>

Encyclopédie des formes mathématiques remarquables – www.mathcurve.com

Logiciels utilisés :

Fractint – <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>

Fractal Forge 2.8.2 – <http://www.fractovia.org/uberto/>

IfsAttrActoR v0.333 – <http://www.webfractales.com/software.php>