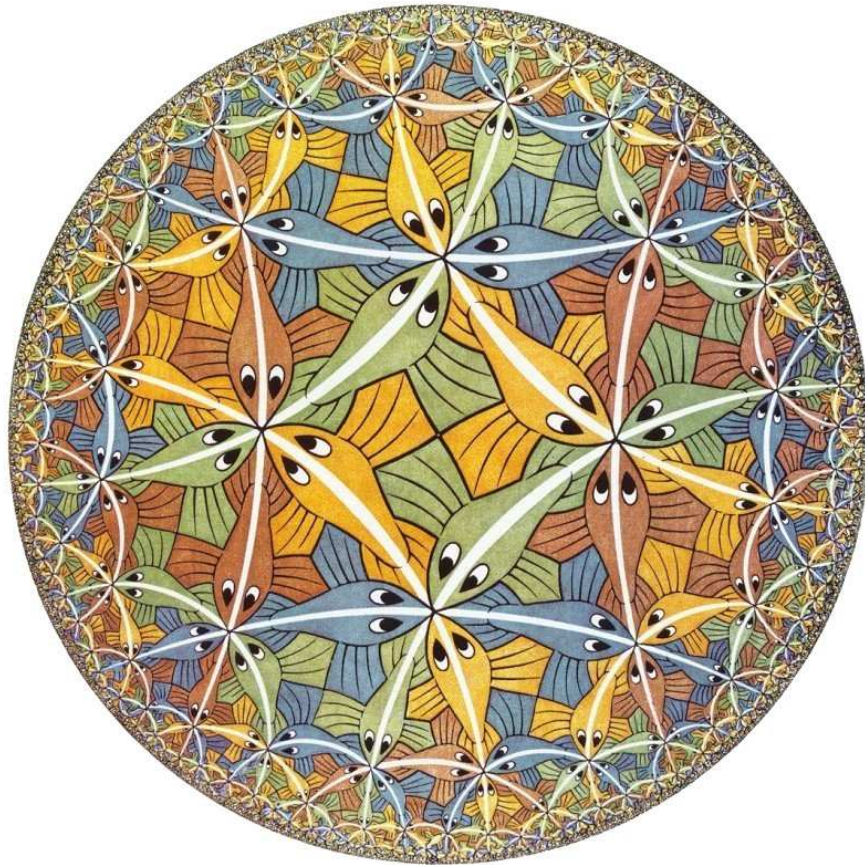


# Géométrie hyperbolique et exemples de pavages

September 15, 2006



BOUSCHBACHER Fabien  
Professeur responsable : M. MAILLOT Sylvain

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Transformations de Möbius</b>	<b>5</b>
2.1	Groupe de Möbius sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	5
2.2	Propriétés des transformations de Möbius . . . . .	10
2.3	Extension de Poincaré . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Géométrie hyperbolique dans le demi-plan de Poincaré <math>\mathcal{H}^2</math> et le disque de Poincaré <math>\Delta</math></b>	<b>15</b>
3.1	La métrique hyperbolique . . . . .	15
3.2	Les géodésiques . . . . .	18
3.3	Les isométries . . . . .	19
3.4	Ensembles convexes . . . . .	22
3.5	Angles . . . . .	22
3.6	Triangles . . . . .	23
3.7	Notation . . . . .	24
3.8	L'angle de parallélisme . . . . .	24
3.9	Triangles dont un sommet se trouve à l'infini . . . . .	25
3.10	Triangles rectangles . . . . .	25
3.11	Les règles du sinus et du cosinus . . . . .	27
3.12	L'aire d'un triangle . . . . .	27
3.13	L'aire d'un polygone . . . . .	28
3.14	Polygones convexes . . . . .	28
3.15	Quadrilatères . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Exemples de pavages du plan hyperbolique</b>	<b>32</b>
4.1	Pavages par des pentagones . . . . .	32
4.2	Pavages par des hexagones . . . . .	34

# 1 Introduction

On peut définir un pavage comme une façon de remplir un espace, généralement à deux ou trois dimensions, à l'aide d'un motif répétitif, sans trou ni débordement. On parle aussi de dallage. Les pavages qui nous intéressent plus particulièrement sont les pavages périodiques. Les pavages périodiques du plan sont ceux qui font intervenir les transformations géométriques planes (translations, rotations, réflexions et leurs composées) : il en existe 17 types et 15 d'entre eux font appel à des polygones réguliers.

Maurits Cornelis Escher était un artiste néerlandais dont l'oeuvre expérimente diverses méthodes de pavage. Il s'est intéressé à des pavages dont nous verrons une présentation : des pavages d'espaces hyperboliques. Mais tout d'abord nous allons jeter un oeil sur un pavage du plan euclidien, "le plus simple", le pavage par des carrés, et chercher l'ensemble des générateurs du groupe des isométries qui laissent ce pavage invariant. Ce qui revient exactement au même que chercher l'ensemble des générateurs du groupe des isométries qui laissent  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  invariant.

Pour base on prend  $(\vec{i}, \vec{j})$ , ou  $\vec{i} = (1, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1)$ . Soient 5 points  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(-1,0)$  et  $D(0,-1)$

Soit  $f$  une isométrie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . La composée de la translation de vecteur  $\overrightarrow{f(O)O}$  et de  $f$  est une isométrie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  fixant  $O$ . On peut donc se ramener à l'étude des isométries de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  fixant  $O$ .

On considère l'ensemble des points  $A, B, C, D$  et  $f$  une isométrie du carré  $ABCD$  qui fixe  $O$  et qui transforme donc ce carré en lui-même. On en déduit que toute isométrie du carré est une isométrie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Et réciproquement toute isométrie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  qui fixe  $O$  est une isométrie du carré. Par conséquent toute isométrie du plan s'écrit comme la composée d'une translation de vecteur  $\vec{u}$  à coordonnées entières et de  $f$  une isométrie du carré  $ABCD$ . Les isométries du carré étant les suivantes:

- 1) les rotations de centre  $O$  et d'angle  $\pi/2$ ,  $\pi$  ou  $3\pi/2$ .
- 2) les réflexions d'axes  $(AC)$ ,  $(BD)$  et d'axes les deux bissectrices du repère  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

Les isométries qui laissent  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sont engendrées par : les translations de vecteurs  $(0,1)$  et  $(1,0)$ , la réflexion d'axe  $(BD)$  et la réflexion par rapport à la première bissectrice.

Afin de pouvoir étudier les particularités de certains pavages de l'espace hyperbolique, nous allons tout d'abord nous intéresser aux fonctions de Möbius qu'on pourra voir plus tard comme des isométries hyperboliques.

Puis, pour bien comprendre la nature et les propriétés des polygones utilisés pour les pavages hyperboliques que nous décrirons, nous introduirons quelques notions de base de géométrie hyperbolique, comme la métrique hyperbolique, les notions de droite hyperbolique, angles entre deux droites, le parallélisme, les propriétés des triangles hyperboliques et autres polygones, etc.

Et enfin nous décrirons quelques pavages hyperboliques à l'aide des notions découvertes tout au long de ce document.

## 2 Transformations de Möbius

### 2.1 Groupe de Möbius sur $\mathbb{R}^n$

**Définition 2.1.1** On appelle sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$$

où  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$

**Définition 2.1.2** On appelle réflexion (ou inversion)  $\phi$  par rapport à  $S(a, r)$  l'application  $x \mapsto \phi(x)$  où :

$$\phi(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|}\right)^2(x - a) \quad (1)$$

Dans le cas particulier où la sphère est  $S(\mathbf{0}, 1)$ ,  $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ .

Notation : A partir de maintenant on notera  $x^* = \frac{x}{|x|^2}$ . Ce qui donne  $\phi(x) = a + r^2(x - a)^*$ .

**Remarque 2.1.3**  $\phi$  n'est pas définie pour  $x = a$ , on adjoint donc un point à  $\mathbb{R}^n$  noté  $\infty$  et on note  $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  et on définit  $\phi(a) = \infty$  et  $\phi(\infty) = a$ .

**Propriété(s) 2.1.4**  $\phi$  est une bijection de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ .

**Propriété(s) 2.1.5**  $(\phi(x) = x) \Leftrightarrow (x \in S(a, r))$ .

**Définition 2.1.6** On appelle plan de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ ,

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x.a) = t\} \cup \{\infty\}$$

où  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$ ,  $x.a = \sum x_j a_j$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Définition 2.1.7** On appelle réflexion  $\phi$  par rapport à  $P(a, t)$  l'application  $x \mapsto \phi(x)$  où

$$\phi(x) = x + \lambda a,$$

et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\frac{1}{2}(x + \phi(x)) \in P(a, t)$  ce qui donne

$$\phi(x) = x - 2[(x.a) - t]a^*, \quad (2)$$

pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\phi(\infty) = \infty$ .

**Propriété(s) 2.1.8**  $\forall x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ ,  $\phi^2(x) = x$  donc  $\phi$  est une bijection de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  et  $(\phi(x) = x) \Leftrightarrow (x \in P(a, t))$ .

**Propriété(s) 2.1.9** Les inversions  $\phi$  sont continues sur  $\widehat{\mathbb{R}}^n - (\{\infty\} \cup \{\phi^{-1}(\infty)\})$ .

1) Soit  $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \mapsto \tilde{x} = (x_1, x_2 \dots x_n, 0)$ ,  $\tilde{\infty} = \infty$ . C'est une bijection de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  sur le plan  $x_{n+1} = 0$  de  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ .

2) Le plan  $x_{n+1} = 0$  de  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$  peut être envoyé bijectivement sur la sphère  $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| = 1\}$  par la projection stéréographique

$$\pi : \pi(\tilde{x}) = \tilde{x} + t(e_{n+1} - \tilde{x}),$$

où  $e_{n+1} = (0, 0 \dots 0, 1)$  et  $t$  tel que  $|\pi(\tilde{x})| = 1$ .

**Remarque 2.1.10** La condition  $|\pi(\tilde{x})| = 1 \Rightarrow t = 1$  et quand  $|\tilde{x}| = |x|$ ,

$$t = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}.$$

Conclusion :

$$\pi(\tilde{x}) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|x|^2 + 1} \dots \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right), x \in \widehat{\mathbb{R}}^n \text{ et } \pi(\infty) = e_{n+1}.$$

La fonction  $x \mapsto \pi(\tilde{x})$  est une bijection de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  sur  $S^n$ . On peut transférer la métrique euclidienne de  $S^n$  vers une métrique  $d$  sur  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , qu'on appelle métrique chordale.

**Définition 2.1.11**  $d(x, y) = |\pi(\tilde{x}) - \pi(\tilde{y})|$ ,  $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ .

Explicitement :

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}} & \text{si } x, y \neq \infty \\ \frac{2}{(1+|x|^2)^{1/2}} & \text{si } y = \infty \end{cases} \quad (3)$$

La métrique  $d$  restreinte à  $\mathbb{R}^n$  induit la même topologie que la métrique euclidienne. Ceci nous permet de conclure que chaque  $\phi$  est continue en  $\infty$  et  $\phi^{-1}(\infty)$ .

**Définition 2.1.12** Une transformation de Möbius agissant sur  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  est la composée d'un nombre fini de réflexions (par rapport à des sphères ou des plans).

### Propriété(s) 2.1.13

- 1) Chaque transformation de Möbius est un homéomorphisme de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$
- 2) La composée de deux transformations de Möbius est encore une transformation de Möbius.
- 3) L'inverse d'une transformation de Möbius est une transformation de Möbius (si  $\phi = \phi_1\phi_2\dots\phi_m$ , alors  $\phi^{-1} = \phi_m\phi_{m-1}\dots\phi_1$ )
- 4)  $\phi^2(x) = x$  donc Id est une transformation de Möbius.

Conclusion : Les transformations de Möbius forment un groupe.

**Définition 2.1.14** Le groupe des transformations de Möbius agissant sur  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  est appelé : Groupe général de Möbius (noté  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ ) .

### Exemple(s) 2.1.15

- 1)  $x \mapsto x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  , appartient à  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ .

C'est la réflexion par rapport à  $(x.a) = 0$  suivie de la réflexion par rapport à  $(x.a) = \frac{1}{2}|a|^2$ .

- 2)  $x \mapsto kx$ ,  $k > 0$ , appartient à  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ .

C'est la réflexion par rapport à  $S(0,1)$  suivie de la réflexion par rapport à  $S(0,\sqrt{k})$ .

- 3) Soit  $\phi$  la réflexion par rapport à  $S(a,r)$  et  $\phi^*$  la réflexion par rapport à  $S(0,1)$  et soit  $\psi(x) = rx + a$ , alors  $\phi = \psi\phi^*\psi^{-1}$ .  $\psi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  d'après 1) et 2) donc deux réflexions par rapport à des sphères sont conjuguées.

**Théorème 2.1.16** Toute isométrie euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  est la composée d'au plus  $n + 1$  réflexions par rapport à des plans. En particulier toute isométrie est une transformation de Möbius.

*Démonstration* : Comme chaque réflexion par rapport à un plan est une isométrie, il suffit de considérer les seules isométries qui vérifient  $\phi(0) = 0$ . De telles isométries préservent la longueur des vecteurs car :

$$|\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(0)| = |x - 0| = |x|$$

et elles préservent aussi le produit scalaire car :

$$\begin{aligned} 2(\phi(x).\phi(y)) &= |\phi(x)|^2 + |\phi(y)|^2 - |\phi(x) - \phi(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 \\ &= 2(x.y) \end{aligned}$$

Ce qui signifie que les vecteurs  $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$  sont deux à deux orthogonaux et donc linéairement indépendant. Comme il y a  $n$  vecteurs, ils forment une base de  $\mathbb{R}^n$  et donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $\mu$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n \mu_j \phi(e_j).$$

Mais comme les  $\phi(e_j)$  sont deux à deux orthogonaux ,

$$\begin{aligned} \mu_j &= (\phi(x).\phi(e_j)) \\ &= (x.e_j) \\ &= x_j. \end{aligned}$$

Donc

$$\phi \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j \phi(e_j)$$

et cela montre que  $\phi$  est linéaire et transforme  $\mathbb{R}^n$  en lui-même. Comme toute isométrie est une bijection, la dimension du noyau de  $\phi$  est nulle donc  $\phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ .

Si  $A$  est la matrice représentant dans  $\phi$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors  $\phi(x) = xA$  et  $A$  a pour colonnes  $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$ . Ce qui montre que l'élément en position  $(i, j)$  dans  $AA^t$  est  $(\phi(e_i).\phi(e_j)) = (e_i.e_j)$  ; ce qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon. On en conclue que  $A$  est une matrice orthogonale.

Nous allons maintenant montrer que  $\phi$  est la composée d'au plus  $n$  réflexions par rapport à des plans. On pose d'abord :

$$a_1 = \phi(e_1) - e_1.$$



Si  $a_1 \neq 0$ , on note  $\psi_1$  la réflexion par rapport au plan  $P(a_1, 0)$  et, à partir de l'égalité (2), par calcul on montre que  $\psi_1$  transforme  $\phi(e_1)$  en  $e_1$ . Si  $a_1 = 0$  on pose  $\psi = I$  pour que dans tous les cas  $\psi_1$  transforme  $\phi(e_1)$  en  $e_1$ . Maintenant on pose  $\phi_1 = \psi_1 \circ \phi$  : donc  $\phi_1$  est une isométrie qui fixe  $0$  et  $e_1$ .

En général supposons que  $\phi_k$  est une isométrie qui fixe  $0, e_1, \dots, e_k$  et posons

$$a_{k+1} = \phi_k(e_{k+1}) - e_{k+1}.$$

A nouveau, on pose  $\psi_{k+1} = I$  (si  $a_{k+1} = 0$ ) ou alors  $\psi_{k+1}$  est la réflexion par rapport à  $P(a_{k+1}, 0)$  (si  $a_{k+1} \neq 0$ ) et exactement comme précédemment,  $\psi_{k+1} \circ \phi_k$  fixe  $0$  et  $e_{k+1}$ . De plus, si  $1 \leq j \leq k$  :

$$\begin{aligned} (e_j \cdot a_{k+1}) &= (e_j \cdot \phi_k(e_{k+1})) - (e_j \cdot e_{k+1}) \\ &= (\phi_k(e_j) \cdot \phi_k(e_{k+1})) - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par (2),

$$\psi_{k+1}(e_j) = e_j.$$

Comme  $\phi_k$  fixe aussi  $0, e_1, \dots, e_k$  on en déduit que  $\psi_{k+1} \circ \phi_k$  fixe  $0, e_1, \dots, e_{k+1}$ . Il existe alors des transformations  $\psi_j$  (qui sont soit l'identité, soit des réflexions par rapport à des plans), telles que l'isométrie  $\psi_n \dots \psi_1 \phi$  fixe  $0, e_1, \dots, e_n$ . De plus cette transformations est linéaire, et donc il s'agit de l'identité : donc  $\phi = \psi_1 \dots \psi_n$ .  $\square$

**Théorème 2.1.17** *Une fonction  $\phi$  est une isométrie euclidienne si et seulement si elle est de la forme  $\phi(x) = xA + x_0$ , où  $A$  est une matrice orthogonale et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

**Théorème 2.1.18** *Etant donné une matrice réelle orthogonale, il existe une matrice réelle orthogonale telle que:*

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & A_r & \\ & & & I_s \\ (0) & & & & -I_t \end{pmatrix}, \text{ où } r, s, t \geq 0 \text{ et } A_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}.$$

**Remarque 2.1.19** *Toute isométrie euclidienne qui fixe l'origine peut donc être représentée par une telle matrice.*

**Théorème 2.1.20** *Toute réflexion renverse l'orientation et conserve les angles.*

**Corollaire 2.1.21** *La composée d'un nombre pair de réflexions conserve l'orientation. La composée d'un nombre impair de réflexions renverse l'orientation.*

**Définition 2.1.22** *Le groupe de Möbius  $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$  agissant sur  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  est le sous-groupe de  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  de l'ensemble des transformations de Möbius qui conserve l'orientation.*

## 2.2 Propriétés des transformations de Möbius

N.B. : Le mot "Sphère" sera indifféremment utilisé au sens de sphère  $S(a, r)$  ou de plan.

**Théorème 2.2.1** *Soit  $\phi$  une transformation de Möbius et  $\Sigma$  une sphère. Alors  $\phi(\Sigma)$  est une sphère.*

*L'équation d'une sphère  $\Sigma$  est :*

$$\begin{cases} |x|^2 - 2(x.a) + |a|^2 - r^2 = 0 & \text{pour } S(a, r) \\ -2(x.a) + 2t = 0 & \text{pour } P(a, t) \end{cases},$$

*ce qui peut être écrit :*

$$a_0 |x|^2 - 2(x.a) + a_{n+1} = 0$$

où  $a = (a_1, a_2 \dots a_n)$ .

*Le vecteur des coefficients de  $\Sigma$ ,  $(a_0, a_1 \dots a_n, a_{n+1})$  est unique à un coefficient multiplicatif non nul près.*

*De plus si  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  est un vecteur des coefficients alors  $|a|^2 > a_0 a_{n+1}$ .*

**Définition 2.2.2** *Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  de vecteurs des coefficients respectifs  $(a_0, a_1 \dots a_n, a_{n+1})$  et  $(b_0, b_1 \dots b_n, b_{n+1})$ .*

*Le produit inversif  $(\Sigma, \Sigma')$  de  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  est :*

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2(a.b) - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{1/2} (|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{1/2}}$$

*Il y a trois cas possibles :*

*Premier cas :  $\Sigma = S(a, r)$ ,  $\Sigma' = S(b, t)$  alors :*

$$(\Sigma, \Sigma') = \left| \frac{r^2 + t^2 - |a - b|^2}{2rt} \right|.$$

Deuxième cas :  $\Sigma = S(a, r)$ ,  $\Sigma' = P(b, t)$  alors :

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a.b) - t|}{r |b|}.$$

Troisième cas :  $\Sigma = P(a, r)$ ,  $\Sigma' = P(b, t)$  alors :

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a.b)|}{|a| |b|}.$$

**Remarque 2.2.3** Dans tous les cas si  $\Sigma \cap \Sigma' \neq \emptyset$  alors  $(\Sigma, \Sigma') = \cos \theta$  où  $\theta$  est l'un des angles d'intersection. En particulier  $((\Sigma, \Sigma') = 0) \Leftrightarrow (\Sigma \perp \Sigma')$ .

Dans le cas 2),  $(\Sigma, \Sigma') = \delta/r$  où  $\delta$  est la distance du centre de  $S(a, r)$  au plan  $P(b, t)$  donc  $(\Sigma, \Sigma') = 0$  si et seulement si  $a \in P(b, t)$ .

**Théorème 2.2.4** Pour toute transformation de Möbius  $\phi$  et pour toutes sphères  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ ,  $(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma')$ .

**Théorème 2.2.5** Soit  $\Sigma$  une sphère,  $\sigma$  la réflexion par rapport à  $\Sigma$  et  $I$  l'identité.

Si  $\phi$  est une transformation de Möbius qui fixe tout  $x$  de  $\Sigma$ , alors soit  $\phi = I$  soit  $\phi = \sigma$ .

**Corollaire 2.2.6** Soit  $\eta$  la réflexion par rapport au plan  $x_n = 0$ . Toute réflexion  $\sigma$  est conjuguée à la réflexion  $\eta$ .

**Corollaire 2.2.7** Deux réflexions de  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  sont conjuguées.

**Définition 2.2.8** Soit  $\sigma$  la réflexion par rapport à  $\Sigma$ .  $x$  et  $y$  sont des points inverses relativement à  $\Sigma$  si et seulement si  $y = \sigma(x)$  et  $x = \sigma(y)$ .

**Théorème 2.2.9** Soient  $x$  et  $y$  des points inverses relativement à  $\Sigma$  et  $\phi$  une transformation de Möbius. Alors  $\phi(x)$  et  $\phi(y)$  sont des points inverses relativement à  $\phi(\Sigma)$ .

**Théorème 2.2.10** Les points  $x$  et  $y$  sont des points inverses relativement à  $\Sigma$  si et seulement si la sphère passant par  $x$  et  $y$  est orthogonale à  $\Sigma$ .

**Définition 2.2.11** Etant donné 4 points  $x, y, u, v$  de  $\mathbb{R}^n$ , le birapport de ses points est :

$$[x, y, u, v] = \frac{d(x, u)d(y, v)}{d(x, y)d(u, v)}$$

soit encore :

$$[x, y, u, v] = \frac{|x - u| |y - v|}{|x - v| |u - y|}$$

**Théorème 2.2.12** Une application  $\phi : \widehat{\mathbb{R}^n} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}$  est une transformation de Möbius si et seulement si elle conserve le birapport.

### 2.3 Extension de Poincaré

Poincaré observa que chaque transformation de Möbius  $\phi$  de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  possède une extension naturelle dans  $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$  ( $\tilde{\phi}$  de Möbius). On regarde  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  comme un sous-groupe de  $GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$  et pour passer de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  à  $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$  on considère

$$x = (x_1, x_2 \dots x_n) \mapsto \tilde{x} = (x_1, x_2 \dots x_n, 0).$$

**Définition 2.3.1** Si  $\phi$  est la réflexion par rapport à  $S(a, r)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\tilde{\phi}$  est la réflexion par rapport à  $S(\tilde{a}, r)$ . Si  $\phi$  est la réflexion par rapport à  $P(a, t)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\tilde{\phi}$  est la réflexion par rapport à  $P(\tilde{a}, t)$ .

**Propriété(s) 2.3.2** Si  $x \in \widehat{\mathbb{R}^n}$  et  $y = \phi(x)$ , alors :

$$\tilde{\phi}(x_1 \dots x_n, 0) = (y_1 \dots y_n, 0) = \tilde{\phi}(\tilde{x})$$

**Remarque 2.3.3** On peut aussi identifier  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  et écrire :

$$\tilde{\phi}(x, 0) = (\phi(x), 0).$$

**Remarque 2.3.4**  $\tilde{\phi}$  laisse le plan  $x_{n+1} = 0$  invariant (dans  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ ).

$\tilde{\phi}$  laisse chaque demi-plan  $x_{n+1} > 0$  et  $x_{n+1} < 0$  invariant.

**Proposition 2.3.5** Comme dans  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ ,  $\phi = \phi_1 \phi_2 \dots \phi_m$ , il existe une transformation de Möbius  $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 \dots \tilde{\phi}_m$ , qui étend l'action de  $\phi$  sur  $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$  et qui préserve  $\mathcal{H}^{n+1} = \{(x_1 \dots x_n, x_{n+1}), x_{n+1} > 0\}$ .

**Définition 2.3.6**  $\tilde{\phi} \in GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$  est appelée l'extension de Poincaré de  $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ .

**Remarque 2.3.7**  $\phi \mapsto \tilde{\phi}$  est un homomorphisme injectif de  $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  dans  $GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$ .

**Propriété(s) 2.3.8** Si  $\tilde{\phi}$  est la réflexion par rapport à la sphère  $S(\tilde{a}, r)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  alors :

$$\frac{|\tilde{\phi}(y) - \tilde{\phi}(x)|}{|y - x|} = \frac{r^2}{|x - \tilde{a}| |y - \tilde{a}|}$$

Notons  $[\tilde{\phi}(x)]_j$  la  $j^{\text{eme}}$  composante de  $\tilde{\phi}(x)$ .

**Remarque 2.3.9** Comme  $\tilde{\phi}(x) = \tilde{a} + r^2(x - \tilde{a})^*$ , on a :

$$[\tilde{\phi}(x)]_{n+1} = 0 + \frac{r^2 x_{n+1}}{|x - \tilde{a}|^2}.$$

Conséquence :  $\frac{|y - x|^2}{y_{n+1} x_{n+1}} = \frac{|\tilde{\phi}(y) - \tilde{\phi}(x)|^2}{[\tilde{\phi}(y)]_{n+1} [\tilde{\phi}(x)]_{n+1}}$  (invariance par rapport à  $\tilde{\phi}$ ).

**Remarque 2.3.10** Si  $\tilde{\phi}$  est la réflexion par rapport à  $P(\tilde{a}, t)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  cette invariance reste vraie.

Conclusion :  $\frac{|y - x|^2}{y_{n+1} x_{n+1}}$  est invariant par rapport à toute extension de Poincaré.

Conséquence : L'extension  $\tilde{\phi}$  de Poincaré de  $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ , est une isométrie de  $\mathcal{H}^{n+1}$  muni de la métrique riemannienne  $\rho$  donnée par  $ds = \frac{|dx|}{x_{n+1}}$ . C'est là un modèle d'espace hyperbolique et  $\rho$  est la métrique hyperbolique de  $\mathcal{H}^{n+1}$ .

**Remarque 2.3.11** Si  $x = se_{n+1}$  et  $y = te_{n+1}$  alors :

$$\rho(x, y) = |\log(s/t)| \Rightarrow \cosh \rho(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}$$

**Remarque 2.3.12** Les deux membres de l'égalité précédente sont invariants par rapport à toute  $\tilde{\phi}$ .

**Remarque 2.3.13** La sphère hyperbolique de centre hyperbolique  $y = (y_1, y_2 \dots y_{n+1})$  et de rayon  $r : \{x \in \mathcal{H}^{n+1} : \rho(x, y) = r\}$  est la sphère euclidienne :

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + (x_{n+1} - y_{n+1} \cosh r)^2 = (y_{n+1} \sinh r)^2.$$

**Propriété(s) 2.3.14** Pour deux points de  $\mathcal{H}^{n+1}$ , il existe une unique courbe qui les relie qui minimise l'intégrale  $\int_{\gamma} \frac{|dx|}{x_{n+1}}$ .

### 3 Géométrie hyperbolique dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}^2$ et le disque de Poincaré $\Delta$

$\mathcal{H}^2$  sera vu comme un sous ensemble de  $\mathbb{C}$  :  $\mathcal{H}^2 = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ . Et on prendra la métrique  $\rho$  dérivant de la différentielle

$$ds = \frac{|dz|}{Im(z)}.$$

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  et la métrique sera aussi notée  $\rho$ , dérivant de la différentielle

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}. \quad (4)$$

On introduit la notion de cercle de points à l'infini, dans  $\mathcal{H}^2$  ce sera  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  et dans  $\Delta$  ce sera  $\{z : |z| = 1\}$ . On appelle plan hyperbolique fermé la réunion du plan hyperbolique  $\mathcal{H}^2$  ou  $\Delta$  et du cercle à l'infini associé.

On a donc vu précédemment que les réflexions par rapport aux cercles de la forme  $|z - x_0| = r$  ( $x_0$  réel et  $r > 0$ ) et par rapport aux "droites verticales" de la forme  $x = x_1$  ( $x_1$  réel) sont des isométries de  $(\mathcal{H}^2, \rho)$ .

#### 3.1 La métrique hyperbolique

Décrivons tout d'abord la construction de la métrique  $\rho$  à partir de la différentielle  $ds = \frac{|dz|}{Im(z)}$ . A chaque courbe continuellement dérivable par morceaux de  $\mathcal{H}^2$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}^2$ , on associe une "longueur"  $\|\gamma\|$  par la formule :

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{Im[\gamma(t)]} dt.$$

**Définition 3.1.1** On définit  $\rho$  par  $\rho(z, w) = \inf \|\gamma\|$  ( $z, w \in \mathcal{H}^2$ ), où l'inf est pris sur toutes les courbes  $\gamma$  qui relient  $z$  et  $w$  dans  $\mathcal{H}^2$ .

**Remarque 3.1.2** Il est clair que  $\rho$  est positif, symétrique et satisfait l'inégalité triangulaire :

$$\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$$

donc  $\rho$  est une métrique de  $\mathcal{H}^2$ .

Maintenant posons  $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , où  $a, b, c, d$  sont des réels et  $ad - bc > 0$  donc  $g$  transforme  $\mathcal{H}^2$  en lui-même. Après calcul on obtient

$$\frac{|g'(z)|}{\text{Im}[g(z)]} = \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

et donc

$$\|g(\gamma)\| = \int_a^b \frac{|g'(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|}{\text{Im}[g(\gamma(t))]} dt = \|\gamma\|.$$

Conséquence :  $\rho(g(z), g(w)) = \rho(z, w)$  ce qui montre que chaque  $g$  de cette forme est une isométrie de  $(\mathcal{H}^2, \rho)$ . C'est ce que nous allons utiliser pour obtenir  $\rho$  de façon explicite.

**Théorème 3.1.3** Avec  $\rho$  comme définie précédemment et avec  $z, w$  dans  $\mathcal{H}^2$ ,

$$(i) \quad \rho(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|};$$

$$(ii) \quad \cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)};$$

$$(iii) \quad \sinh \left[ \frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{2(\text{Im}(z)\text{Im}(w))^{1/2}};$$

$$(iv) \quad \cosh \left[ \frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\text{Im}(z)\text{Im}(w))^{1/2}};$$

$$(v) \quad \tanh \left[ \frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|.$$

*Démonstration* : On montre par des calculs longs et fastidieux que toutes les égalités du théorème sont équivalentes. Montrons donc que (ii) est vraie.

Comme  $\rho(g(z), g(w)) = \rho(z, w)$ , les membres de gauche de (ii) est invariant par rapport à  $g$ . De même après calcul on montre que

$$\frac{|g(z) - g(w)|^2}{2\text{Im}(g(z))\text{Im}(g(w))} = \frac{|z - w|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)}.$$

Le membre de droite de (ii) est donc aussi invariant par rapport à  $g$ . En fait ce n'est rien d'autre que l'invariance vue en remarque 2.3.9.



Choisissons  $z$  et  $w$  distincts dans  $\mathcal{H}^2$  et soit  $L$  l'unique cercle ou droite euclidienne passant par  $z$  et  $w$  et orthogonale à l'axe réel. Maintenant  $L$  rencontre l'axe réel en un point  $\alpha$  et en prenant  $g(z) = -(z - \alpha)^{-1} + \beta$  (pour un  $\beta$  convenablement choisi), on peut supposer que  $g$  transforme  $L$  en l'axe des imaginaires purs. Il est, par conséquent, seulement nécessaire de vérifier (ii) pour  $z$  et  $w$  sur l'axe des imaginaires purs.

On suppose maintenant que  $z = ip$ ,  $w = iq$  et aussi que  $0 < p < q$ . Si

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

est une courbe qui joint  $z$  à  $w$ , alors

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \int_0^1 \frac{|x'(t) + iy'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &= \log(q/p) \end{aligned}$$

comme  $y(1) = q$ ,  $y(0) = p$ . Comme il y a égalité, par exemple, quand  $\gamma(t) = i[p + t(q - p)]$ , on trouve :

$$\rho(ip, iq) = \log(q/p) \quad (0 < p < q),$$

puis on voit que (ii) est vraie pour  $z = ip$  et  $w = iq$ .  $\square$

Considérons maintenant le modèle  $\Delta$ . La fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

est une bijection de  $\mathcal{H}^2$  sur  $\Delta$ , donc  $\rho^*$  donné par

$$\rho^*(z, w) = \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \quad (z, w \in \Delta),$$

est une métrique sur  $\Delta$ . Cependant, comme

$$\frac{2|f''(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{\text{Im}(z)} \quad (z \in \mathcal{H}^2),$$

on peut aussi identifier  $\rho^*$  à la métrique dérivant de la différentielle (4). Comme l'on préfère utiliser  $\rho$  plutôt que  $\rho^*$ , on dira que  $f$  est une isométrie de  $(\mathcal{H}^2, \rho)$  sur  $(\Delta, \rho)$ .

**Définition 3.1.4** Soit  $E$  un sous-ensemble du plan hyperbolique. Alors :

- (i)  $\tilde{E}$  représente la fermeture de  $E$  dans le plan hyperbolique.
- (ii)  $\bar{E}$  représente la fermeture de  $E$  dans le plan hyperbolique fermé.

Bien sûr,  $\bar{E}$  est aussi la fermeture de  $E$  dans  $\hat{\mathbb{C}}$ .

## 3.2 Les géodésiques

**Définition 3.2.1** *On définit une droite hyperbolique ou h-droite comme l'intersection du plan hyperbolique et d'un cercle euclidien ou d'une droite qui est orthogonale au cercle à l'infini.*

Avec cette définition on a facilement les affirmations suivantes :

1. Il existe une unique h-droite passant par deux points du plan hyperbolique.
2. Deux h-droites distinctes se coupent en, au maximum, un point du plan hyperbolique.
3. La réflexion par rapport à une h-droite est une  $\rho$ -isométrie (isométrie au sens de la métrique hyperbolique) (cf Transformations de Möbius).
4. Etant donné deux h-droites  $L_1$  et  $L_2$ , il existe une  $\rho$ -isométrie  $g$  telle que  $g(L_1) = L_2$ .

Etant donné  $w$  de  $\mathcal{H}^2$ , il est clair que  $\{z \in \mathcal{H}^2 : |z| = |w|\}$  est l'unique h-droite passant par  $w$ , orthogonale à l'axe des imaginaires purs "positifs" (une h-droite). Comme l'isométrie considérée en 4. peut être une transformation de Möbius on obtient :

Etant donné une h-droite  $L$  et un point  $w$ , il existe une unique h-droite passant par  $w$  et orthogonale à  $L$ .

**Théorème 3.2.2** *Soient  $z$  et  $w$  des points du plan hyperbolique. Une courbe  $\gamma$  reliant  $z$  et  $w$  vérifie  $\|\gamma\| = \rho(z, w)$  si et seulement si  $\gamma$  est une paramétrisation de  $[z, w]$  et est une courbe simple.*

C'est pourquoi nous prenons les h-droites comme géodésiques (ce sont les courbes de longueurs les plus courtes entre deux points). Maintenant considérons trois points  $\zeta, z, w$ , il est clair après le théorème 3.1.3 que si  $\zeta$  est entre  $z$  et  $w$  alors

$$\rho(z, w) = \rho(z, \zeta) + \rho(\zeta, w).$$

De même, si  $\zeta$  n'est pas entre  $z$  et  $w$  alors la courbe  $\gamma$  constituée de  $[z, \zeta]$  et  $[\zeta, w]$  vérifie d'après le théorème précédent

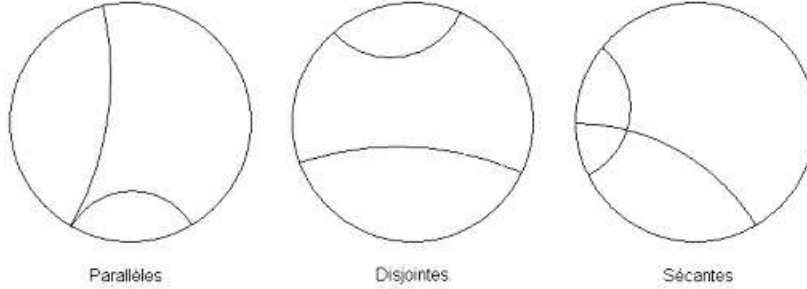
$$\|\gamma\| > \rho(z, w).$$

D'où le résultat suivant :

**Théorème 3.2.3** Soient  $z$  et  $w$  des points du plan hyperbolique. Alors  $\rho(z, w) = \rho(z, \zeta) + \rho(\zeta, w)$  si et seulement  $\zeta \in [z, w]$ .

**Terminologie :** Les points,  $z_1, z_2, \dots$  sont colinéaires si et seulement s'ils appartiennent à la même géodésique. Chaque géodésique a deux points extrêmes, chacun sur le cercle à l'infini.

**Définition 3.2.4** Soient  $L_1$  et  $L_2$  des géodésiques distinctes. On dit que  $L_1$  et  $L_2$  sont parallèles si et seulement si elles ont un point extrême en commun. Si  $L_1$  et  $L_2$  n'ont aucun point extrême en commun, elles sont sécantes quand  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  et disjointes quand  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ .



### 3.3 Les isométries

Soient  $z, w$  et  $\zeta$  des points distincts de  $\mathcal{H}^2$  avec  $\zeta$  entre  $z$  et  $w$ .

Le théorème 3.2.3 nous permet d'affirmer que pour toute isométrie  $\phi$ , le point  $\phi(\zeta)$  est entre  $\phi(z)$  et  $\phi(w)$ . Donc  $\phi$  envoie le segment  $[z, w]$  sur le segment  $[\phi(z), \phi(w)]$  ; c'est pourquoi  $\phi$  transforme les h-droites en h-droites.

Etant donné une isométrie  $\phi$ , il existe une isométrie

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc < 0),$$

telle que  $g(\phi)$  laisse l'axe des imaginaires purs "positifs"  $L$  invariant (on choisit  $g$  pour qu'elle transforme  $\phi(L)$  en  $L$ ). En appliquant les isométries  $z \mapsto kz$  ( $k > 0$ ) et  $z \mapsto -1/z$  aussi souvent que nécessaire, on peut supposer que  $g \circ \phi$  fixe  $i$  et laisse  $(i, \infty)$  et  $(0, i)$  invariant. Une conséquence immédiate du théorème 3.2.3 est que  $g \circ \phi$  fixe tout point de  $L$ .

Soit  $z \in \mathcal{H}^2$  avec  $z = x + iy$  et  $g(\phi(x)) = u + iv$ .

Pour tout  $t$  positif,

$$\rho(z, it) = \rho(g \circ \phi(z), g \circ \phi(it)) = \rho(u + iv, it)$$

et donc, d'après le théorème 3.1.1,

$$[x^2 + (y - t)^2]v = [u^2 + (v - t)^2]y.$$

Comme cela est vrai pour tout  $t$  positif, on a  $y = v$  et  $x^2 = u^2$ : donc  $g \circ \phi(z) = z$  ou  $-\bar{z}$ .

Un simple argument de continuité (les isométries sont nécessairement continues) montre que l'une de ces équations est vraie pour tout  $z \in \mathcal{H}^2$ . Ce qui montre le résultat suivant :

**Théorème 3.3.1** *Le groupe des isométries de  $(\mathcal{H}^2, \rho)$  est précisément le groupe des applications de la forme :*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad z \mapsto \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels et  $ad - bc > 0$ . De plus, le groupe des isométries est engendré par des réflexions par rapport à des  $h$ -droites.

Un développement similaire est valable pour le modèle  $\Delta$ . Dans ce cas les isométries sont :

$$z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{a}},$$

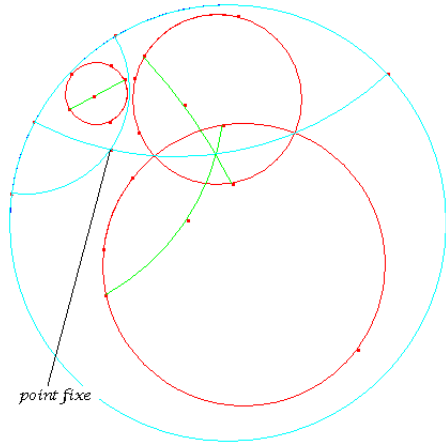
$$\text{où } |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

**Classification des isométries :**

**Définition 3.3.2** *Soit  $\phi$  une isométrie, on dit que :*

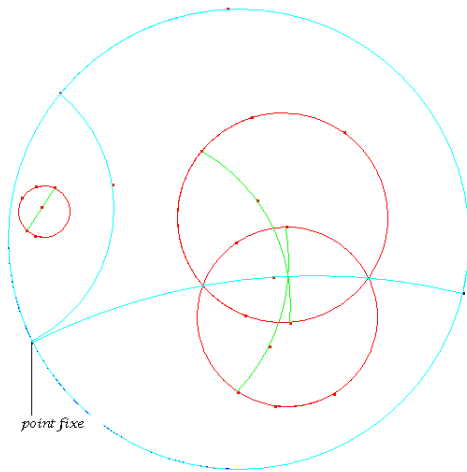
(i)  $\phi$  est elliptique s'il existe un point  $z \in \Delta$  tel que  $\phi(z) = z$ .

*Exemple de transformation elliptique :*



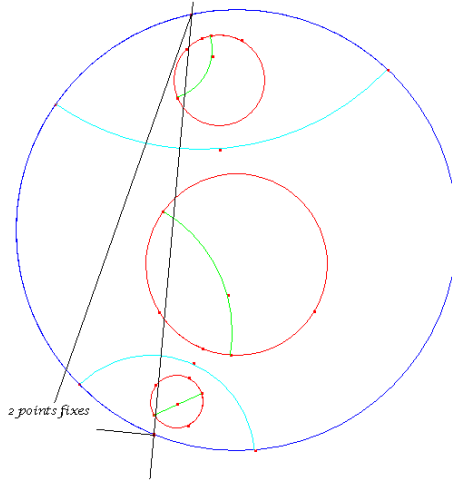
(ii)  $\phi$  est parabolique s'il n'existe aucun point fixe dans  $\Delta$  et s'il existe un unique point  $z$  de  $\overline{\Delta}$  tel que  $\phi(z) = z$ .

*Exemple de transformation parabolique :*



(iii)  $\phi$  est hyperbolique s'il n'existe aucun point fixe dans  $\Delta$  et s'il existe exactement 2 points  $z$  et  $w$  de  $\overline{\Delta}$  tel que  $\phi(z) = z$  et  $\phi(w) = w$ .

*Exemple de transformation hyperbolique :*



### 3.4 Ensembles convexes

**Définition 3.4.1** *Un sous-ensemble  $E$  du plan hyperbolique est dit convexe si et seulement si pour tous  $z$  et  $w$  dans  $E$ , on a  $[z, w] \subset E$ .*

Les assertions suivantes se vérifient facilement :

1. Si  $E$  est convexe,  $g(E)$  l'est pour toute isométrie  $g$ .
2. Si  $E$  est convexe, alors  $E^\circ$  (intérieur de  $E$ ) et  $\tilde{E}$  le sont.
3. Si  $E_1, E_2, \dots$  sont convexes et  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , alors  $\bigcup E_n$  est convexe.
4. Si chaque  $E_\alpha$  est convexe alors  $\bigcap_\alpha E_\alpha$  l'est.

### 3.5 Angles

En géométrie hyperbolique, un angle en un point  $z$  est une paire d'arc  $(L, L')$  partant de  $z$ . Soit  $(L, L')$  un angle en  $z$  et supposons que  $L$  et  $L'$  ne sont pas sur la même géodésique. L'arc  $L$  détermine une géodésique, disons  $L^*$ , et  $L' - \{z\}$  ne rencontre pas  $L^*$ . Il s'en suit que  $L' - \{z\}$  appartient à l'un des demi-plans ouverts, disons  $\Sigma'$ , complémentaire de  $L^*$ . De même  $L - \{z\}$  appartient à l'un des demi-plans ouverts, disons  $\Sigma$ , complémentaire de  $L'$ . On définit maintenant l'intérieur de l'angle  $(L, L')$  comme étant  $\Sigma \cap \Sigma'$ . On voit

clairement que l'intérieur de  $(L, L')$  est une composante du complémentaire de  $L \cup L'$  ; l'autre composante est appelée l'extérieur de  $(L, L')$ .

Si  $L$  et  $L'$  sont sur la même géodésique, alors soit  $L \cup L'$  est aussi une géodésique, soit  $L = L'$  auquel cas on définit l'intérieur de vide et l'extérieur de complémentaire de  $L$ .

Etant donné  $(L, L')$  en  $z$  où  $L$  et  $L'$  définissent des géodésiques différentes, l'intérieur de  $(L, L')$  est convexe en tant qu'intersection de demi-plans. Bien sûr, on peut mesurer les angles intérieur et extérieur en  $z$  de la même façon que les angles euclidiens et les mesures appartiennent respectivement aux intervalles  $[0, \pi)$  et  $(\pi, 2\pi]$ .

### 3.6 Triangles

Soient  $z_1, z_2, z_3$  trois points non colinéaires du plan hyperbolique et soient  $L_2$  et  $L_3$  les arcs de  $z_1$  à  $z_2$  et de  $z_1$  à  $z_3$  respectivement. Alors  $(L_2, L_3)$  est un angle en  $z_1$  : on note  $A_1$  son intérieur. De la même façon on note  $A_2$  et  $A_3$  les intérieurs respectifs d'angles en  $z_2$  et  $z_3$ .

**Définition 3.6.1** *Le triangle  $T(z_1, z_2, z_3)$  est  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ .*

**Terminologie :** Les  $z_j$  sont les sommets, les  $[z_i, z_j]$  les côtés et les  $A_i$  sont les angles de  $T(z_1, z_2, z_3)$ . Chaque angle de  $T(z_1, z_2, z_3)$ , étant un angle intérieur, vaut moins de  $\pi$ . Pour être plus bref on notera  $T$  pour  $T(z_1, z_2, z_3)$ . Notons que chaque  $A_i$  est convexe donc  $T$  l'est aussi.

**Remarque 3.6.2** *Les  $A_j$  sont aussi les angles de  $T$  au sens où, pour un disque ouvert  $D$  assez petit de centre, disons,  $z_1$ , on a  $D \cap T = D \cap A_1$ .*

*Pour le voir, considérons  $H_j$ , le demi-plan contenant  $z_j$  et ayant les deux autres  $z_i$  sur son bord. Alors :*

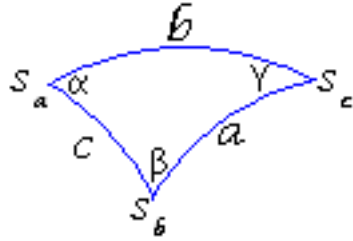
$$\begin{aligned} D \cap A_1 &= (D \cap H_1) \cap (H_2 \cap H_3) \\ &= D \cap (H_2 \cap H_3) \cap (H_3 \cap H_1) \cap (H_1 \cap H_2) \\ &= D \cap T \end{aligned}$$

On définit aussi  $\partial T = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$ . On appelle  $T_0$  l'intérieur de la courbe fermée  $\partial T$ . Comme  $\partial T \subset \widetilde{H}_1$ ,  $T_0 \subset H_1$ . Le même argument vaut pour  $H_2$  et  $H_3$ , donc :  $T_0 \subset H_1 \cap H_2 \cap H_3 = T$ .

**Théorème 3.6.3** *Soit  $L$  la géodésique contenant le plus long côté, disons  $[z_2, z_3]$  de  $T$ . Alors la géodésique  $L_1$ , passant par  $z_1$  et orthogonale à  $L$ , rencontre  $L$  en un point  $w$  de  $[z_2, z_3]$ .*

### 3.7 Notation

Pour la suite, nous allons utiliser une notation plus standard afin de faciliter l'écriture des relations trigonométriques. Un triangle  $T$  aura des sommets notés  $s_a, s_b, s_c$  : les côtés opposés à ces sommets auront les longueurs respectives  $a, b, c$  et les angles intérieurs respectifs seront notés  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Comme les isométries conservent les longueurs et les angles, les relations trigonométriques sont invariantes par isométrie.



Cas particulier : Si, par exemple,  $s_a$  est à l'infini, alors :  $\alpha = 0, b = c = +\infty$ .

Si deux sommets sont à l'infini, alors tous les trois côtés ont des longueurs infinies.

### 3.8 L'angle de parallélisme

L'angle de parallélisme est le terme classique pour la relation trigonométrique établie pour un triangle dont les angles sont  $\alpha, 0$ , et  $\pi/2$  : dans ce cas il n'y a que deux paramètres,  $\alpha$  et  $b$ .

**Théorème 3.8.1** *Soit  $T$  un triangle dont les angles sont  $\alpha, 0$ , et  $\pi/2$  ( $\alpha \neq 0$ ). Alors :*

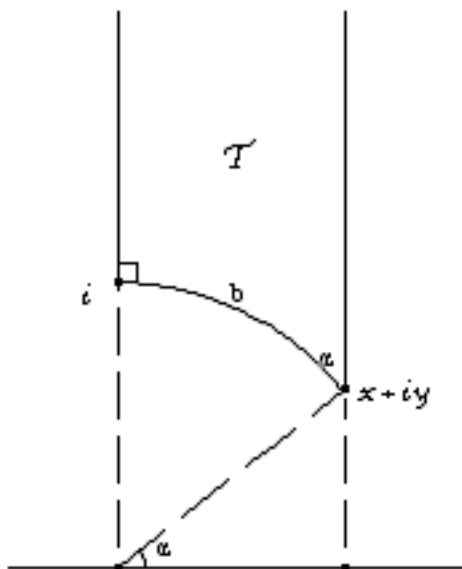
- (i)  $\sinh b \cdot \tan \alpha = 1$ ;
- (ii)  $\cosh b \cdot \sin \alpha = 1$ ;
- (iii)  $\tanh b \cdot \sec \alpha = 1$ .

*Démonstration* : On se place dans  $\mathcal{H}^2$  et on peut supposer que

$$s_c = i, \quad s_b = \infty, \quad s_a = x + iy,$$



où  $x^2 + y^2 = 1$ :



Comme  $y = \sin \alpha$ , la formule (ii) du théorème 3.1.3 nous donne (ii). Les autres formules sont équivalentes à (ii).  $\square$

### 3.9 Triangles dont un sommet se trouve à l'infini

Considérons un triangle dont les angles sont  $\alpha, \beta$  et  $0$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont différents de  $0$  : alors  $a = b = +\infty$  et  $0 < c < +\infty$ . Nous allons maintenant déterminer la relation entre  $\alpha, \beta$  et  $c$ .

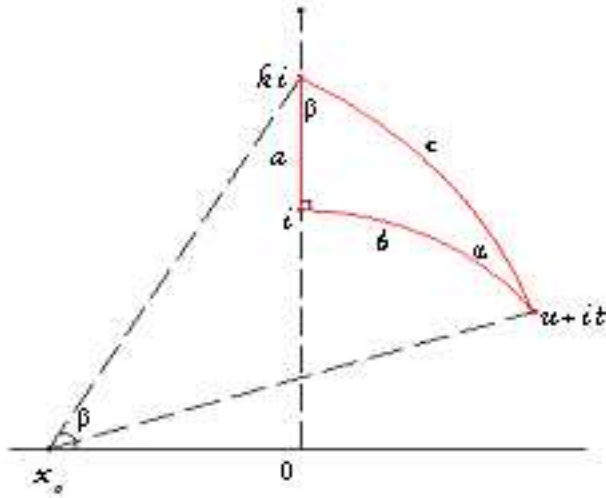
**Théorème 3.9.1** *Pour tout triangle dont les angles valent  $\alpha, \beta$  et  $0$ , on a :*

$$\cosh c = \frac{1 + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta};$$

$$\sinh c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

### 3.10 Triangles rectangles

On considère maintenant un triangle dont les angles sont  $\alpha, \beta, \pi/2$ . En appliquant l'isométrie adéquate, on peut supposer que :  $s_c = i, s_b = ki, s_a = u + it$ , où  $k > 1$  et  $u$  et  $t$  sont positifs tels que  $u^2 + t^2 = 1$ .



Commençons par la relations entre les trois côtés d'un tel triangle. C'est la version hyperbolique du théorème de Pythagore.

**Théorème 3.10.1** *Pour tout triangle dont les angles valent  $\alpha, \beta, \pi/2$ , on a :*

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b.$$

Voyons maintenant les relations entre deux côtés et un angle :

**Théorème 3.10.2** *Pour tout triangle dont les angles valent  $\alpha, \beta, \pi/2$ , on a :*

$$(i) \quad \tanh b = \sinh a \cdot \tan \beta;$$

$$(ii) \quad \sinh b = \sinh c \cdot \sin \beta;$$

$$(iii) \quad \tanh a = \tanh c \cdot \cos \beta.$$

Terminons par les relations entre un côté et deux angles.

**Théorème 3.10.3** *Pour tout triangle dont les angles valent  $\alpha, \beta, \pi/2$ , on a :*

$$(i) \quad \cosh a \cdot \sin \beta = \cos \alpha;$$

$$(ii) \quad \cosh c = \cot \alpha \cdot \cot \beta$$

### 3.11 Les règles du sinus et du cosinus

On considère maintenant un triangle hyperbolique quelconque. On suppose que  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont positifs ( $a, b$  et  $c$  sont donc finies) et l'on montre les résultats suivants :

La règle du sinus :

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

La règle du cosinus I :

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma.$$

La règle du cosinus II :

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

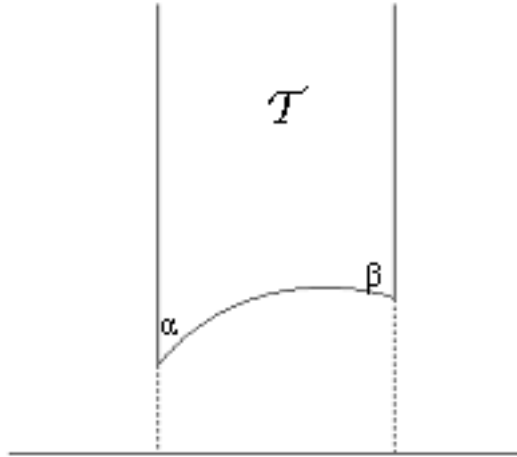
### 3.12 L'aire d'un triangle

Notation : On désignera par  $h(X)$ , l'aire hyperbolique de  $X$ .

**Théorème 3.12.1** *Pour tout triangle  $T$  dont les angles sont  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ ,*

$$h(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

*Démonstration:* Supposons d'abord que  $\gamma = 0$ . On peut supposer que  $s_c = \infty$  et que  $s_a$  et  $s_b$  appartiennent à  $|z| = 1$ .



On a alors :

$$\begin{aligned} h(T) &= \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \left[ \int_{(1-x^2)^{1/2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right] dx \\ &= \pi - (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé pour  $\gamma = 0$ . En général, tout triangle est la différence entre deux triangles de ce type et le résultat s'en suit.  $\square$

**Corollaire 3.12.2** *La somme des angles d'un triangle hyperbolique est inférieure à  $\pi$ .*

### 3.13 L'aire d'un polygone

**Définition 3.13.1** *Un polygone  $P$  est l'intérieur d'une courbe fermée*

$$[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, z_1].$$

**Théorème 3.13.2** *Si  $P$  est un polygone dont les angles intérieurs sont  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , alors*

$$h(P) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n).$$

**Remarque 3.13.3** *Pour un polygone euclidien, on a bien sûr :*

$$(n - 2)\pi = \theta_1 + \dots + \theta_n.$$

### 3.14 Polygones convexes

**Théorème 3.14.1** *Soit  $P$  un polygone dont les angles intérieurs sont  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . Alors  $P$  est convexe si et seulement si chaque  $\theta_j$  vérifie  $0 \leq \theta_j \leq \pi$ .*

Observons que le théorème 3.13.1 montre qu'une condition nécessaire à l'existence d'un polygone dont les angles intérieurs sont  $\theta_1, \dots, \theta_n$  est :

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi.$$

En fait, pour les polygones convexes, cette condition est aussi suffisante.

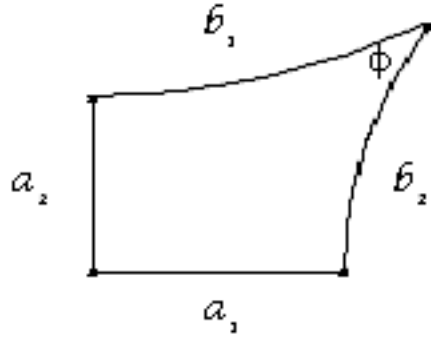
**Théorème 3.14.2** *Soit  $\theta_1, \dots, \theta_n$  un  $n$ -uplet ordonné où  $0 \leq \theta_j < \pi$ , pour  $j = 1, \dots, n$ . Alors il existe un polygone  $P$  d'angles intérieurs  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , placés dans cet ordre sur le contour  $\partial P$ , si et seulement si  $\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi$ .*

En fait, nous allons construire un polygone  $P$  avec ces angles et un disque inscrit touchant tous les côtés de  $P$ .

**Remarque 3.14.3** *En application du théorème 3.14.2, on peut observer qu'il existe un polygone à  $n$  côtés dont tous les angles intérieurs valent  $\pi/2$  si et seulement si  $n \geq 5$ .*

### 3.15 Quadrilatères

Une conséquence directe du théorème 3.14.2 est qu'il existe des quadrilatères dont les angles sont  $\pi/2, \pi/2, \pi/2, \phi$  si et seulement si  $0 \leq \phi < \pi/2$ .



Le théorème qui suit s'applique à la figure précédente :

**Théorème 3.15.1** (i)  $\sinh a_1 \cdot \sinh a_2 = \cos \phi$ ;

(ii)  $\cosh a_1 = \cosh b_1 \sin \phi$ .

La démonstration proposée utilise les deux résultats préliminaires suivants :

**Lemme 3.15.2** *Soit  $L$  une géodésique hyperbolique dans  $\Delta$  de centre euclidien  $\xi$  et rayon euclidien  $r$  et soit  $w$  le point de  $L$  le plus proche de l'origine. Alors  $\sinh \rho(0, w) = 1/r$   $\cosh \rho(0, w) = |\xi|/r$ .*

*Démonstration* : On a clairement  $|\xi| = |w| + r$  et l'orthogonalité nous donne  $|\xi|^2 = 1 + r^2$ . Et comme  $\sinh^2 \left[ \frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$ , on

obtient  $\sin \frac{1}{2}\rho(0, w)$  et donc

$$\sinh \rho(0, w) = \frac{2|w|}{1 - |w|^2} = \frac{1}{r}.$$

On en déduit alors la valeur de  $\cosh$ .

**Lemme 3.15.3** *Soit  $L$  et  $L'$  des géodésiques du plan hyperbolique. Alors le produit inversif  $(L, L')$  est :  $\cosh \rho(L, L')$ ,  $1 - \cos \phi$ , lorsque  $L$  et  $L'$  sont disjointes, parallèles ou se coupent en formant un angle  $\phi$  où  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ , respectivement.*

*Démonstration* : Lorsque deux géodésiques sont disjointes, il existe une géodésique qui leur est orthogonale et  $\rho(L, L')$  est définie comme la longueur du segment orthogonal entre  $L$  et  $L'$ . Par les arguments habituels d'invariance, il suffit de considérer les cas suivants :

- (i)  $L, L'$  sont dans  $\mathcal{H}^2$  et sont données par  $|z| = r, |z| = R$  ;
- (ii)  $L, L'$  sont dans  $\mathcal{H}^2$  et sont données par  $x = 0, x = x_1$  ;
- (iii)  $L$  et  $L'$  sont des diamètres euclidiens de  $\Delta$ .

Dans tous les cas la formule pour  $(L, L')$  vue dans la section 2.2 donne le résultat.

*Démonstration du Théorème* : On peut supposer que les côtés  $a_1$  et  $a_2$  du quadrilatère de la figure précédente sont sur l'axe des réels (positifs) et sur l'axe des imaginaires purs ("positifs"). Supposons que les côtés  $b_1$  et  $b_2$  reposent sur les cercles

$$|z - iv| = R, \quad |z - u| = r,$$

respectivement, où  $u, v, r$ , et  $R$  sont positifs. Alors d'après le lemme 3.15.2,  $\sinh a_1 \cdot \sinh a_2 = 1/rR$ .

Le lemme 3.15.3 implique que  $(L, L') = \cos \phi$  et d'après la section 2.2 on a :

$$\begin{aligned} (L, L') &= \left| \frac{r^2 + R^2 - |u - iv|^2}{2rR} \right| \\ &= \frac{|r^2 + R^2 - u^2 - v^2|}{2rR} \\ &= 1/rR \end{aligned}$$

car, par exemple,  $u^2 = 1 + r^2$ .

Pour démontrer (ii), on replace le polygone de façon à ce que le sommet d'angle  $\phi$  se situe à l'origine et le côté noté  $d$  sur l'axe des réels (positifs). Maintenant effectuons la réflexion par rapport à l'axe des réels : Soit  $L$  la géodésique contenant le côté  $a_2$  et soit  $L'$  l'image de  $L$  par rapport à la réflexion précédemment définie. D'après le lemme 3.15.3 on a :

$$(L, L') = \cosh(2a_1). \quad (5)$$

Si  $L$  (vue comme un cercle euclidien) a pour centre  $de^{i\theta}$  et pour rayon  $r$ , alors  $L'$  a pour centre  $de^{-i\theta}$  et pour rayon  $r$  et clairement,  $|de^{i\theta} - de^{-i\theta}| > 2r$ . Donc

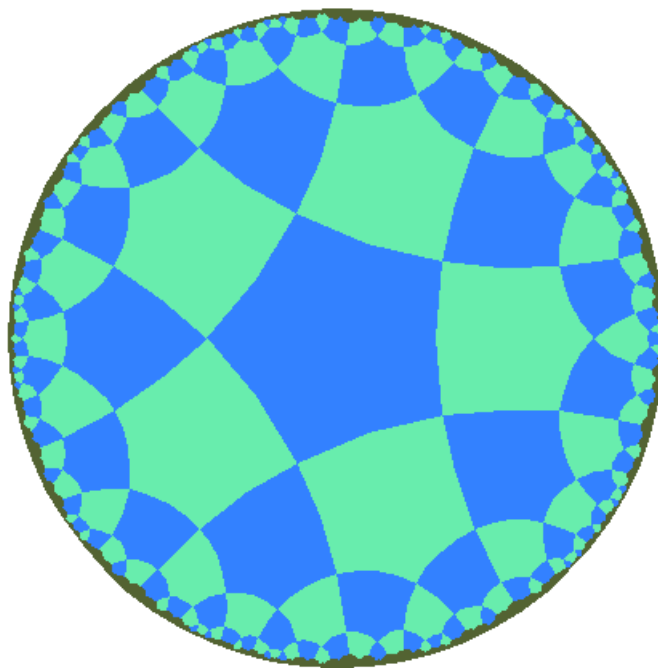
$$\begin{aligned} (L, L') &= \left| \frac{|de^{i\theta} - de^{-i\theta}|^2 - 2r^2}{2r^2} \right| \\ &= \frac{2d^2 \sin^2 \phi - r^2}{r^2} \\ &= 2 \cosh^2 b_1 \cdot \sin^2 \phi - 1 \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.15.2. Et l'égalité (5) donne (ii).  $\square$

## 4 Exemples de pavages du plan hyperbolique

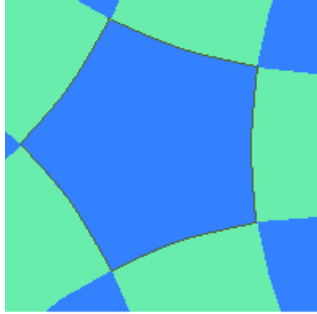
On admettra que si un polygone régulier est un polygone qui a tous ces côtés de même longueur et tous ses angles aux sommets égaux, on montre qu'alors il est inscriptible dans un cercle et que chaque côté est vu du centre sous un angle égal à  $2\pi/n$  si  $n$  est le nombre de côtés du polygone. Il en résulte que si on veut paver le plan hyperbolique de polygones à  $n$  côtés, il y a toujours un pavage régulier avec  $p$  polygones autour de chaque sommet dès que  $1/n + 1/p < 1/2$

### 4.1 Pavages par des pentagones





### Etude du motif de base



Le motif de base comme on peut le voir sur la figure en 4.1 correspond au motif entouré de brun sur la figure ci-dessus. En chaque sommet du motif, 4 pentagones se touchent ; on en déduit que le pentagone du motif de base a 5 angles de valeur égale  $2\pi/4 = \pi/2$ . La somme des angles du pentagone est donc de  $5\pi/2 < 3\pi$ . Donc ce pentagone est réalisable en géométrie hyperbolique. De plus  $1/5 + 1/4 = 9/20 < 1/2$ . Le pavage est donc réalisable.

**Isométries qui laissent le motif de base invariant :** Les réflexions par rapport aux axes qui passent par un sommet et le milieu du côté opposé sont des isométries du motif de base. L'ensemble de ces isométries forment clairement un groupe. Mais deux de ces réflexions suffisent pour générer tout le groupe. Notons  $ABCDE$  l'hexagone où  $A$  est le sommet en haut de la figure puis l'on tourne dans le sens trigonométrique. Si l'on compose par exemple la réflexion  $\sigma_{AI}$  d'axe passant par  $A$  et le milieu  $I$  de  $[CD]$  et la réflexion  $\sigma_{DJ}$  d'axe passant par le milieu  $J$  de  $[A, B]$  et  $D$ , on forme la rotation d'angle  $4\pi/5$ . Donc en composant ces deux rotations on obtient tous les groupes des isométries du pentagone régulier. On a donc un système générateur des isométries du motif de base.

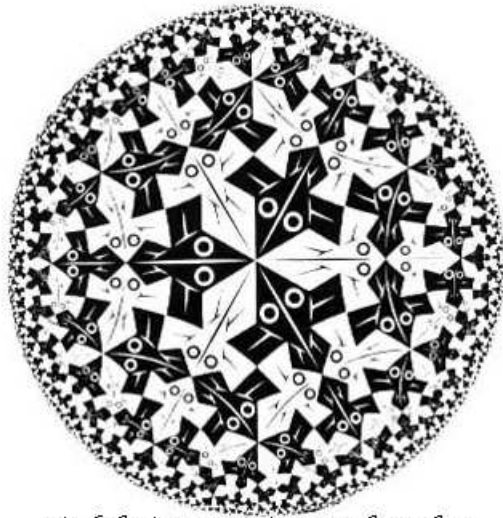
**Etude du pavage :** On peut commencer par noter qu'il n'y a pas de géodésiques parallèles dans ce pavage. Par conséquent toutes les transformations qui laissent le pavage invariant sont elliptiques et hyperboliques.

Par réflexion par rapport aux côtés du motif de base, ce dernier est transformé en pentagones du type :

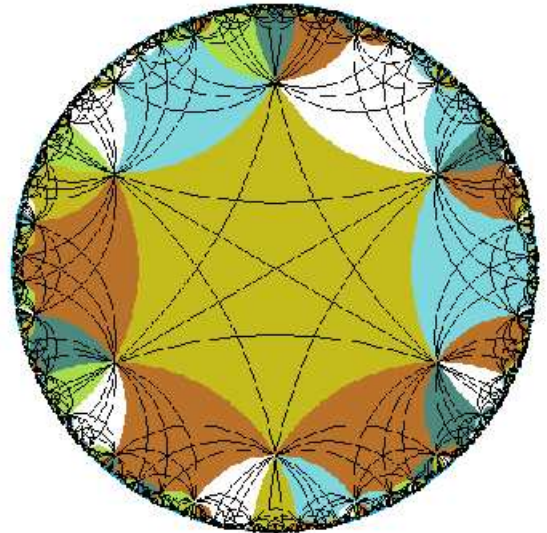


Puis en composant ses réflexions on trouve des pentagones de “plus en plus petits” et en réalité on arrive en composant de façon adéquate toutes ses réflexions à former tout le pavage. Un système générateur des isométries laissant le pavage invariant est donc  $\{\sigma_{AI}, \sigma_{DJ}, \sigma_{AB}, \sigma_{BC}, \sigma_{CD}, \sigma_{DE}, \sigma_{EA}\}$ .

#### 4.2 Pavages par des hexagones



*Cercle limite I - Maurits Cornelis Escher*



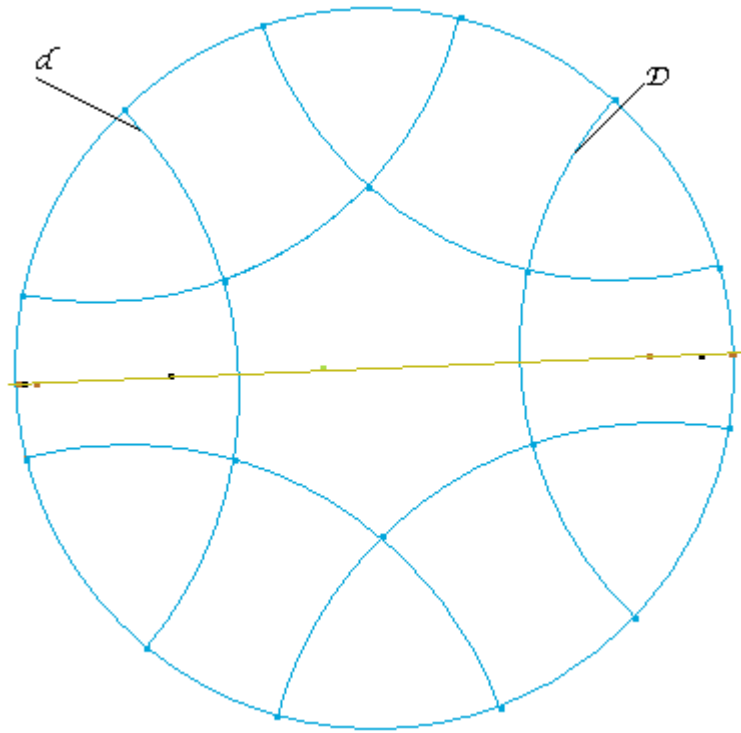
**Etude du motif de base :**



Le motif de base comme on peut le voir sur la figure en 4.2 correspond au motif entouré de rouge sur la figure ci-dessus. En chaque sommet du motif, 4 hexagones se touchent on en déduit que l'hexagone du motif de base a 6 angles de valeur égale  $2\pi/4 = \pi/2$ . La somme des angles de l'hexagone est donc de  $3\pi < 4\pi$ . Donc cet hexagone est réalisable en géométrie hyperbolique. De plus  $1/6 + 1/4 = 5/12 < 1/2$ . Le pavage est donc réalisable.

**Isométries qui laissent le motif de base invariant :** Les réflexions par rapport aux axes qui passent par deux cotés opposés de l'hexagone ainsi que les réflexions par rapport aux axes qui passent par un sommet et le milieu du coté opposé sont des isométries du motif de base. L'ensemble de ces isométries forment clairement un groupe. Mais deux de ces réflexions suffisent pour générer tout le groupe. Notons  $ABCDEF$  l'hexagone où  $A$  est le sommet en haut de la figure puis l'on tourne dans le sens trigonométrique. Dans ce cas la réflexion  $\sigma_{IJ}$  d'axes  $(IJ)$  où  $I$  est le milieu de  $[C, D]$  et  $J$  est le milieu de  $[E, F]$  et la réflexion  $\sigma_{CF}$  d'axe  $(C, F)$  forment un système générateur du groupe des isométries de l'hexagone.

**Etude du pavage :** On peut commencer par noter qu'il n'y a pas de géodésiques parallèles dans ce pavages. Par conséquent toutes les transformations qui laissent le pavage invariant sont elliptiques et hyperboliques :



**Remarque 4.2.1** *On peut voir sur le schéma précédent qu'en répétant les réflexions par rapport à  $d$  et  $D$  les images successives du point vert dans l'hexagone convergent vers les points fixes de la transformation hyperbolique.*

Par réflexion par rapport aux cotés du motif de base, ce dernier est transformé en hexagones du type :



Puis en composant ses réflexions on trouve des hexagones de “plus en plus petits” et en réalité on arrive en composant de façon adéquate toutes ses réflexions à former tout le pavage. Un système générateur des isométries laissant le pavage invariant est donc  $\{\sigma_{IJ}, \sigma_{CF}, \sigma_{AB}, \sigma_{BC}, \sigma_{CD}, \sigma_{DE}, \sigma_{EF}, \sigma_{FA}\}$ .

## References

- [1] Alan F. Beardon. *The Geometry of Discrete groups*. Springer-Verlag, 1995
- [2] Coxeter. *Introduction to Geometry*
- [3] <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/poincare.html>
- [4] [http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/other\\_tess.html](http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/other_tess.html)
- [5] <http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/HyperCJ/Pavage01.html>