

Mouvement d'une toupie symétrique.

ULP-Strasbourg
1ère Année de Magistère de Mathématiques

SCHWOERTZIG Thierry
Année 2003

Mémoire sous la direction de Mme Audin Michèle.

Je tiens à remercier Mme Audin
pour le temps qu'elle a pu me consacrer dans l'élaboration de ce mémoire.

Introduction

L'objet de ce mémoire est de faire l'étude du mouvement d'une toupie symétrique. Du point de vue mathématique c'est un cas de solide mobile autour d'un point fixe; en l'occurrence le point fixe est le point de contact de la toupie avec le sol.

C'est en 1788 que Lagrange en a fait l'étude, et la question du solide mobile autour d'un point fixe a fait travailler les plus grands mathématiciens de la fin du *XVIII^e* siècle et du *XIX^e* siècle. L'académie des Sciences avait à ce sujet institué un prix, le prix Brodin, ce qui avait donné lieu au travail le plus célèbre, celui de S. KOWALESKI (1889).

Dans ce mémoire, l'étude du mouvement de la toupie sera réalisée avec deux approches : une première par la mécanique lagrangienne et l'autre par la mécanique hamiltonienne.

Mouvement d'une toupie symétrique.

Introduction.	3
----------------------	---

A Méthode Lagrangienne.

A-1 Préliminaires.	5
A-2 Les Angles d'Euler.	6
A-3 Expression du Lagrangien.	7
A-3.1 Le vecteur vitesse angulaire Ω .	7
A-3.2 L'énergie cinétique T .	9
A-4 Intégrales premières.	10
A-5 Expression de l'énergie.	11
A-6 Vers un système unidimensionnel.	12
A-7 Description du mouvement de la toupie.	13

B Méthode Hamiltonienne.

B-1 Préliminaires.	15
B-1.1 expression du vecteur de rotation instantanée.	15
B-1.2 expression de la force de gravitation.	15
B-2 Equations d'Euler-Poisson.	16
B-3 Quantités conservées.	16
B-4 Expression de l'équation différentielle.	17
B-5 Résolution de l'équation différentielle.	18
B-5.1 La fonction \wp de Weierstrass.	18
B-5.2 Résolution.	20

C Etude des points critiques de l'application (H, K) .

C-1 Préliminaires.	21
C-2 Etude de rang.	22
C-3 Paramétrisation de la fonction (H, K) .	24
C-4 Les Singularités.	26

Bibliographie	31
----------------------	----

A. Description du mouvement d'une toupie symétrique.

Méthode Lagrangienne.

On s'intéresse à une toupie symétrique de point fixe P , de masse m , soumise à la gravité \vec{g} .

A-1. Préliminaires:

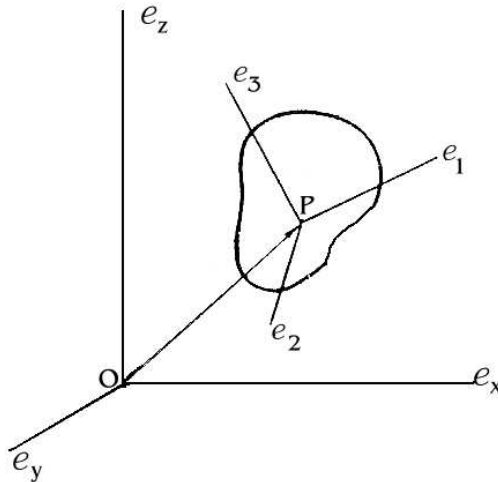
Définition: (**corps solide**) C'est un compact K de \mathbb{R}^3 , connexe par arcs, admettant une densité massique volumique et vérifiant:

$$\forall \varphi_t \in \mathbb{R}^3 \times SO(3), \forall A, B \in K, \|\varphi_t(A) - \varphi_t(B)\| = \|A - B\|$$

(où φ_t dépend du temps.)

Autrement dit, il ne se déforme pas au cours de son mouvement.

Pour décrire le mouvement du solide, nous utiliserons deux systèmes de coordonnées: un repère fixe et un repère mobile tous deux orthonormés: respectivement: (O, e_x, e_y, e_z) et (P, e_1, e_2, e_3) , où P est par exemple le centre d'inertie du solide. Ce dernier repère est en liaison rigide avec le corps solide, et participe à tous ses mouvements. La position du solide par rapport au repère immobile est complètement déterminée si l'on donne la position du repère mobile. \vec{OP} est le vecteur indiquant la position de l'origine P du repère mobile. L'orientation des axes de ce dernier par rapport au système immobile est définie par trois angles indépendants définissant un élément du groupe $SO(3)$, de sorte qu'avec les trois composantes du vecteur \vec{OP} nous avons en tout six coordonnées.



Par conséquent, le mouvement d'un corps solide se présente comme un système mécanique à six degrés de liberté: c'est en effet la dimension du groupe

des transformations de \mathbb{R}^3 , autrement dit $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$.

Par la suite, dans le cas de notre toupie, on choisira comme origine du repère mobile P son point fixe; et on le considère confondu avec l'origine du repère fixe O . De plus on fera coïncider le vecteur unitaire e_3 avec l'axe de symétrie de la toupie.

Décrit dans le repère immobile, le point P est ainsi un point fixe. Les origines des deux repères coïncident tout au cours du mouvement de la toupie et donc on se retrouve avec seulement trois degrés de liberté. En effet, pour connaître la position de la toupie, il suffit de connaître l'orientation des axes mobiles relativement au repère fixe. Par exemple, on peut décrire l'orientation du repère mobile à l'aide de trois angles. Pour cela, il est souvent plus commode d'utiliser ceux qu'on appelle les angles d'Euler.

A-2. Les Angles d'Euler: θ, φ, ψ

Définition: (ligne nodale). *Le plan mobile $\langle e_1, e_2 \rangle$ coupe le plan fixe $\langle e_x, e_y \rangle$ suivant la droite appelée **ligne nodale** ou encore **ligne des noeuds**.*

Remarque: il a lieu de parler de ligne nodale seulement lorsque $\widehat{(e_z, e_3)} \neq 0$. En effet, dans le cas contraire, la ligne des noeuds n'est pas définie: il se trouve que $\dim(\langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle e_x, e_y \rangle) = 2$. Mais dans ce cas, le système se décrit de manière unidimensionnelle à l'aide d'un unique angle de rotation propre.

Par la suite on orientera la ligne nodale suivant le vecteur unitaire e_n de sorte que la base (e_z, e_3, e_n) soit directe.

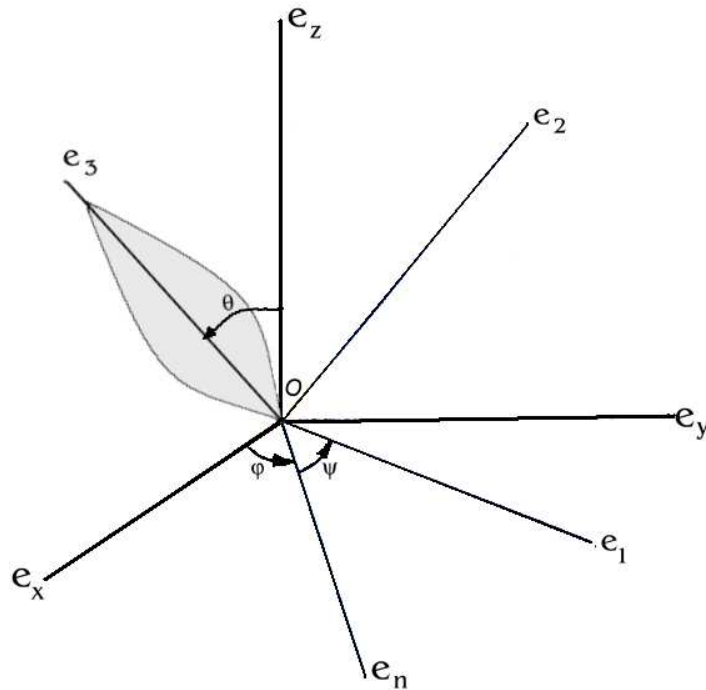
Il existe une isométrie $R \in SO(3)$ transformant le repère fixe (O, e_x, e_y, e_z) en le repère mobile (O, e_1, e_2, e_3) .

$$R := r_{e_3}(\psi) \circ r_{e_1}(\theta) \circ r_{e_3}(\varphi).$$

On applique donc successivement trois rotations d'axes respectifs e_3, e_1, e_3 et d'angles respectifs φ, θ, ψ . Ce sont les angles dits d'Euler.

Définition: θ est l'angle de **précession**, φ l'angle de **nutaton**, et ψ l'angle de **rotation propre**.

Decrivons ces trois transformation successives. Durant la première d'angle φ et d'axe e_3 , e_x est transformé en e_n . Puis durant la seconde, d'angle θ et d'axe e_1 , e_z est transformé en e_3 . Finalement la rotation d'angle ψ et d'axe e_3 , transforme e_n en e_1 . Ainsi R transforme e_x en e_1 , e_z en e_3 , et e_y en e_2 .



Remarque: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $\psi \in [0, 2\pi[$.

L'intérêt des angles d'Euler dans la description du mouvement de notre toupie est que nous arriverons à décrire plus simplement le mouvement de l'axe de la toupie intersecté avec la sphère unité; l'angle de précession nous permettra de décrire le mouvement vertical sur celle-ci, l'angle de nutation nous donnera le mouvement horizontal.

A-3.Expression du Lagrangien: L

Pour étudier le mouvement de la toupie, nous allons établir l'expression de son lagrangien à l'aide des angles d'Euler et de leur dérivées. Pour cela quelques étapes nous sont nécessaires: nous avons besoin de l'expression de l'énergie cinétique et pour cette dernière, l'expression du vecteur de vitesse angulaire Ω .

A-3.1 Le vecteur vitesse angulaire Ω .

L'expression de notre vitesse angulaire s'écrit : $\Omega := \dot{\theta}e_n + \dot{\varphi}e_z + \dot{\psi}e_3$.

On cherche à exprimer les composantes du vecteur Ω dans le repère mobile.

On pose $\Omega = \Omega_1e_1 + \Omega_2e_2 + \Omega_3e_3$.

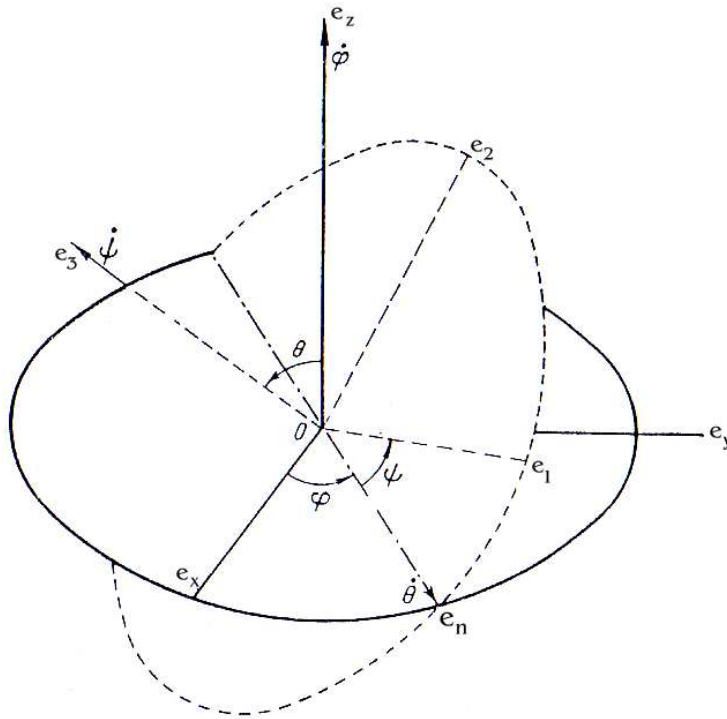
Il faut pour cela projeter sur ces axes les vitesses angulaires $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$.

Nous allons à partir de là décomposer chacune des vitesses angulaires $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$,

et $\dot{\psi}$ suivant les axes concernés: e_1 , e_2 et e_3 .

Vu que la rotation $r_{e_1}(\theta)$ s'effectue dans le plan $\langle e_z, e_3 \rangle$, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est dirigée suivant e_1 confondu lors de cette transformation avec le vecteur directeur de la ligne nodale e_n , et ses composantes dans la base (e_1, e_2, e_3) se déduisent en projetant $\dot{\theta}$ sur les axes e_1 et e_2 et ainsi:

$$\Omega_1 := \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\psi) \\ -\dot{\theta} \sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$$



La rotation $r_{e_3}(\varphi)$ s'effectue dans le plan $\langle e_n, e_x \rangle$, la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ est dirigée suivant l'axe e_z (confondu avec e_3 lors de cette transformation) et ses coordonnées dans la base (e_1, e_2, e_3) se déduisent en projetant $\dot{\varphi}$ sur chacun des axes e_1, e_2, e_3 . Etant donné que la projection de $\dot{\varphi}$ dans le plan $\langle e_1, e_2 \rangle$ est $\dot{\varphi} \sin \theta$, on obtient:

$$\Omega_2 := \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Finalement, la rotation $r_{e_3}(\psi)$ s'effectue dans le plan $\langle e_n, e_1 \rangle$. La vitesse angulaire $\dot{\psi}$ est dirigée suivant l'axe e_3 ; et donc, dans la base (e_1, e_2, e_3) , on a :

$$\Omega_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, l'expression du vecteur vitesse angulaire est la suivante:

$$\Omega = \Omega_1 e_1 + \Omega_2 e_2 + \Omega_3 e_3 = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\psi) \\ -\dot{\theta} \sin(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Les composantes de Ω ne dépendent que des angles θ , φ , ψ et de leurs dérivées.

A-3.2 L'énergie cinétique T .

Affirmation:

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

où $(I_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ sont les moments principaux d'inertie.

Preuve: Par définition de l'énergie cinétique de rotation, nous avons:

$$T := \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$

où $(\Omega_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ sont les composantes du vecteur vitesse de rotation,

et $I_{ik} := \int \rho (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \partial V$.

Le tenseur I_{ik} est appelé tenseur des moments d'inertie ou simplement tenseur d'inertie de la toupie. D'après sa définition, il est symétrique. Comme tout opérateur symétrique, le tenseur d'inertie peut être ramené à une forme diagonale par un choix approprié des directions des axes e_1 , e_2 , et e_3 .

Ces directions sont appelées *axes principaux d'inertie*, et les valeurs correspondantes des composantes du tenseur, *moments principaux d'inertie*; désignons ceux-ci par I_1 , I_2 , et I_3 . On choisit alors notre repère mobile avec un tel choix des axes e_1 , e_2 , e_3 .

L'énergie cinétique de rotation s'écrit alors de façon particulièrement simple:

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2).$$

On peut donc maintenant écrire l'expression du lagrangien en fonction des angles d'Euler et de leur dérivées. Dans notre cas l'expression du lagrangien a la forme $L = T - U$, où U est l'énergie potentielle de pesanteur.

$U = \int \int \int z g dm = mgl \cos(\theta)$ où $l \cos(\theta)$ est la hauteur du centre de gravité, c'est-à-dire sa projection sur l'axe vertical fixe e_z .

De l'expression de l'énergie cinétique T établie précédemment, il en résulte que:

$$L = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2) - mgl \cos(\theta)$$

Or pour la toupie symétrique, le choix des axes e_1 et e_2 est arbitraire, ce qui signifie que $I_1 = I_2$. On peut alors procéder à des simplifications:

$$L = \frac{1}{2} (I_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + I_3 \Omega_3^2) - mgl \cos(\theta)$$

Il ne reste plus qu'à développer les carrés Ω_1^2 , Ω_2^2 et à les sommer:

On utilise pour cela l'expression des composantes Ω écrites précédemment pour obtenir:

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)$$

$$\Rightarrow L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 - mgl \cos(\theta)$$

A-4. Intégrales Premières

Dans notre fonction de Lagrange, les coordonnées φ et ψ n'apparaissent qu'à travers de leurs dérivées. On dit que les coordonnées φ et ψ sont *cycliques* (on parle aussi de *coordonnées muettes*).

A ce stade, nous disposons par conséquent de deux intégrales premières cinétiques pour chacune des coordonnées cycliques φ et ψ :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\varphi} L = cste \\ \frac{d}{d\psi} L = cste \end{cases}$$

qui traduisent la conservation de composantes du moment cinétique.

Les grandeurs $\frac{d}{d\dot{\varphi}} L$ et $\frac{d}{d\dot{\psi}} L$ sont les composantes du moment cinétique de rotation défini relativement au point O , et étant donné que $\dot{\varphi}$ est colinéaire à e_z et $\dot{\psi}$ est colinéaire à e_3 , ce sont donc les composantes du moment suivant les axes e_z et e_3 respectivement. On projète le moment cinétique M sur ces deux axes et on note ses composantes M_z et M_3 respectivement. Nos deux intégrales premières sont donc:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\dot{\varphi}} L = M_z \\ \frac{d}{d\dot{\psi}} L = M_3 \end{cases}$$

Explicitons le calcul en utilisant l'expression précédente de notre lagrangien:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\dot{\varphi}} L = M_z = \dot{\varphi} (I_1 \sin^2(\theta) + I_3 \cos^2(\theta)) + \dot{\psi} I_3 \cos(\theta) \\ \frac{d}{d\dot{\psi}} L = M_3 = \dot{\varphi} I_3 \cos(\theta) + \dot{\psi} I_3 \end{cases}$$

A-5. Expression de l'Energie

$$\begin{aligned} E := T + U &= \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 + mgl \cos(\theta) \\ \Rightarrow E &= mgl \cos(\theta) + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 \end{aligned}$$

Un calcul immédiat nous permet d'écrire:

$$\begin{cases} \frac{M_3^2}{2I_3} = \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 \\ \frac{(M_z - M_3 \cos(\theta))^2}{2I_1 \sin^2(\theta)} = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = mgl \cos(\theta) + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(M_z - M_3 \cos(\theta))^2}{I_1 \sin^2(\theta)} + \frac{M_3^2}{2I_3}$$

A-6. Vers un système unidimensionnel

D'après l'expression de nos deux intégrales premières, on en déduit que:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos(\theta)}{I_1 \sin^2(\theta)}, \text{ et d'autre part, } \dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos(\theta) \frac{M_z - M_3 \cos(\theta)}{I_1 \sin^2(\theta)}.$$

En éliminant les variables angulaires liées aux fonction $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ de l'équation de conservation de l'énergie à l'aide de ces deux égalités précédentes, on aboutit à une énergie mécanique E' d'un système unidimensionnel dépendant uniquement de la fonction $\theta(t)$, suivante:

$$E' = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$$

On étudie alors le mouvement de ce système unidimensionnel dont l'énergie potentielle effective est:

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(M_z - M_3 \cos(\theta))^2}{2 I_1 \sin^2(\theta)} - mgl \cos(\theta)$$

Pour étudier ce système, on procède par des changements de variables qui nous simplifieront grandement les calculs:

$$\cos(\theta) =: u \quad \frac{M_z}{I_1} =: a \quad \frac{M_3}{I_1} =: b \quad \frac{2E'}{I_1} =: \alpha \quad \frac{2mgl}{I_1} =: \beta > 0$$

On peut maintenant écrire la loi de conservation de l'énergie E' du système unidimensionnel à l'aide de ces nouvelles constantes:

$$\dot{u}^2 = f(u)$$

on a donc ramené l'étude de notre système tridimensionnel de coordonnées (φ, θ, ψ) à un système unidimensionnel dont la coordonnée $u := \cos(\theta)$ est solution de l'équation différentielle $\dot{u}^2 = f(u)$; où $f(u)$ est le polynôme de degré trois: $(\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2$ que nous allons étudier:

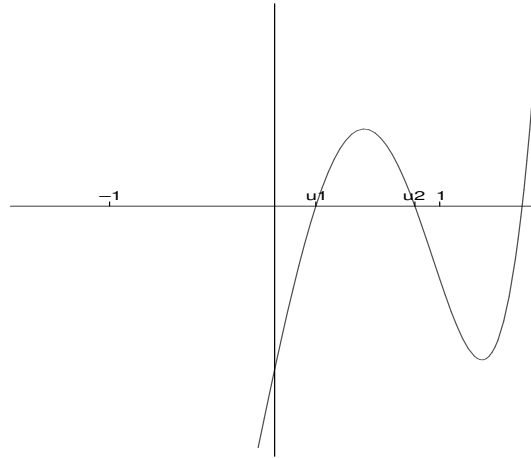
Il faut rappeler que dans notre cas $\begin{cases} u := \cos(\theta) \Rightarrow u \in [-1, 1] \\ \dot{u}^2 = f(u) \Rightarrow f(u) \geq 0 \end{cases}$.

On va donc s'intéresser à la partie positive du graphe de la fonction $f(u)$ située entre -1 et 1.

$$\begin{aligned} f(1) &= -(a - b)^2 < 0 \text{ si } a \neq b \\ f(-1) &= -(a + b)^2 < 0 \text{ si } a \neq -b \\ \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) &= \infty, \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty \end{aligned}$$

Il est donc clair que nous avons donc deux racines pour le polynome f dans l'intervalle $[-1, 1]$: u_1 et u_2 . Egalement une troisième mais pour $u > 1$.

graphe de la fonction $f(u)$:



A-7. Description du mouvement

Puisque u varie entre u_1 et u_2 , θ varie entre deux angles limites que nous appellerons θ_1 et θ_2 . Ce qui signifie que le point d'intersection de l'axe de la toupie avec la sphère unité se déplace dans un anneau défini par les deux parallèles correspondant à chacune des inclinaisons limites de l'axe par rapport à la normale.

Pour continuer la description du mouvement de la toupie, nous faisons intervenir

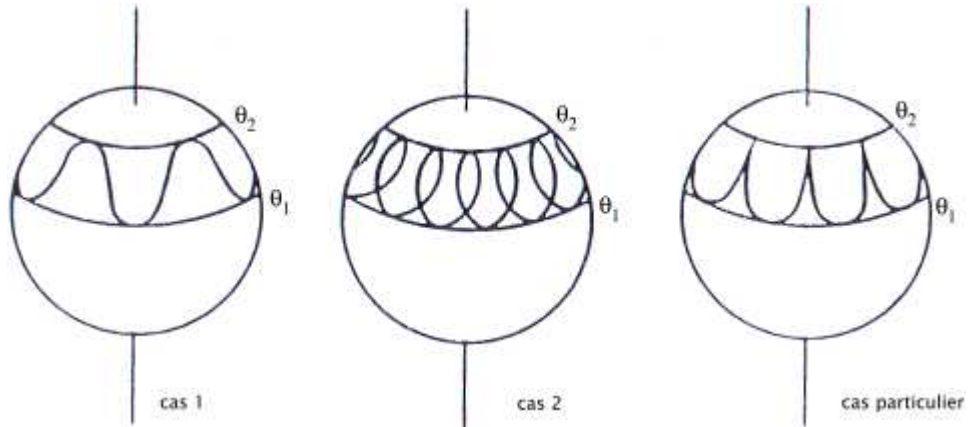
l'égalité suivante: $\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos(\theta)}{I_1 \sin^2(\theta)}$ qui s'écrit de manière plus simple grâce

aux changements de variables précédents: $\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}$. Comme nous l'avons vu dans la description des angles d'Euler, l'angle φ est l'angle donné par $\widehat{e_x, e_n}$ il va donc nous permettre de décrire le mouvement horizontal du point d'intersection de l'axe sur la sphère unité contrairement à l'angle θ qui nous permettait de décrire le mouvement vertical de ce point, c'est à dire l'inclinaison de l'axe.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2} \\ u \in [u_1, u_2] \end{cases}$$

Etant donné que $1 - u^2 > 0$ car $u \in]\cos(\frac{\pi}{2}), \cos(0)[$, il nous reste à étudier le signe de la fonction affine $u \mapsto a - bu$. Si la racine de cette fonction se trouve en-dehors de l'intervalle $]u_1, u_2[$ alors le signe de $\dot{\varphi}$ reste constant; en d'autres termes φ évolue de manière monotone (première figure ci-dessous). Dans le cas contraire si cette racine se trouve dans $]u_1, u_2[$ alors on a un changement de signe de la dérivée et donc le point d'intersection de l'axe de la toupie sur la sphère unité décrit une forme de cycloïde (cf seconde figure ci-dessous).

(schéma de description du mouvement de la toupie: 2 cas principaux, et un cas particulier.)



Pour la troisième figure, il s'agit d'un cas particulier qui est observé quand la racine de notre fonction affine se trouve sur une des bornes de l'intervalle $]u_1, u_2[$. Sur cette figure, la vitesse horizontale de l'axe de la toupie relativement à la sphère s'annule lorsque $u \rightarrow u_2$ ie $\theta \rightarrow \theta_2$.

B. Description du mouvement d'une toupie symétrique.
Méthode Hamiltonienne.

B-1 Préliminaires

Soit O le point fixe de notre toupie symétrique et soit G son centre de gravité.

On pose $L := \overrightarrow{OG}$, Γ la force gravitationnelle, Ω le vecteur vitesse angulaire instantanée, M le moment cinétique. Décrire l'évolution du vecteur Γ dans le repère mobile, c'est décrire le mouvement de notre toupie. En effet, les coordonnées de Γ , constant dans le repère fixe, nous donne l'orientation du repère mobile vis à vis de ce dernier.

B-1.1 expression du vecteur de rotation instantanée.

Comme nous l'avons vu précédemment, R est une isométrie qui transforme le repère fixe en le repère mobile.

Par définition, on appelle ω *vecteur de rotation instantanée*, le vecteur associé à $\overbrace{R^{-1}R}^{\dot{}}$ et Ω ce même vecteur exprimé dans le repère mobile. $\overbrace{R^{-1}R}^{\dot{}}$ est une matrice de dimension 3×3 antisymétrique. L'espace des matrices antisymétriques 3×3 est de dimension 3; de sorte que l'on peut assimiler l'opérateur correspondant à cette matrice à un vecteur de dimension 3. En particulier dans notre cas $\overbrace{R^{-1}R}^{\dot{}}$ est associé à ω . De sorte que $\forall q \in \mathbb{R}^3, \overbrace{R^{-1}R}^{\dot{}}.q = \omega \wedge q$.

B-1.2 Expression de la force de gravitation.

En désignant par γ l'expression du vecteur Γ dans le repère fixe, nous avons

$$\begin{aligned}
 \text{donc que } \overbrace{\dot{\gamma}}^{\dot{}} &= \overbrace{R^{-1}\dot{\Gamma}}^{\dot{}} = 0. \\
 \Rightarrow \overbrace{R^{-1}\dot{\Gamma}}^{\dot{}} + \overbrace{R^{-1}\dot{\Gamma}}^{\dot{}} &= 0 \\
 \Rightarrow \dot{\Gamma} &= -\overbrace{RR^{-1}\dot{\Gamma}}^{\dot{}} \\
 \Rightarrow \dot{\Gamma} &= -\overbrace{R(R^{-1}R)}^{\dot{}}\gamma \\
 \Rightarrow \dot{\Gamma} &= -\overbrace{RR^{-1}\dot{\Gamma}}^{\dot{}} \\
 \Rightarrow \dot{\Gamma} &= -\Omega \wedge \Gamma \\
 \Rightarrow \dot{\Gamma} &= \Gamma \wedge \Omega = [\Gamma, \Omega]
 \end{aligned}$$

B-2 Equations d'Euler-Poisson

On applique le théorème des moments, en sommant les moments des forces appliquées à la toupie par rapport au point fixe O .

$$\begin{aligned} n &= \dot{m} = \widehat{R^{-1}\dot{M}} \text{ où } m = R^{-1}M \\ n &= R^{-1}N = \widehat{R^{-1}\dot{M}} = \widehat{R^{-1}M} + R^{-1}\dot{M} = R^{-1}(\Omega \wedge M) + R^{-1}\dot{M} \\ &\Rightarrow \dot{M} = M \wedge \Omega + N \end{aligned}$$

Or $N = \Gamma \wedge L = [\Gamma, L]$ car les forces d'appui s'exercent en O ont un moment nul; n'intervient donc que la gravitation.

Nous avons alors écrits les équations d'Euler-Poisson qui ont les expressions suivantes:

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = [\Gamma, \Omega] \\ \dot{M} = [M, \Gamma] + [\Gamma, L] \end{cases}$$

B-3 Quantités conservées.

Pendant le mouvement, plusieurs quantités sont conservées. Pour citer la première qui nous vient à l'esprit, il y a la force de gravitation: $\|\Gamma\|^2 = \text{const.}$ sur notre planète Terre. Nous avons bien entendu le libre choix sur les unités alors il est clair que le choix $\|\Gamma\|^2 = 1$ s'impose.

Il y a ensuite le moment de Lagrange $K = ML$. Celui-ci est conservé, car $\dot{K} = \dot{M}L$ (rappelons que L est constant, c'est un vecteur caractéristique de notre solide), et donc d'après ce qui précède, $\dot{K} = \dot{M}L = (M \wedge \Gamma + \Gamma \wedge L)L = (M \wedge \Gamma)L$. Cette dernière égalité étant obtenu en voyant que: $(\Gamma \wedge L) \perp L \Rightarrow (\Gamma \wedge L) \cdot L = 0$. Or dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , $\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $(u \wedge v) \cdot w = \det(u, v, w)$. Par conséquent, $\dot{K} = \det(M, \Omega, L)$

Nous allons maintenant montrer que $\det(M, \Omega, L) = 0$. Précédemment, nous avons vu que notre tenseur d'inertie que nous appellerons par la suite J est diagonalisable dans une base orthonormée, et que les deux moments principaux d'inertie I_1 et I_2 étaient égaux. J prend alors la forme suivante:

$$J = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$M = J\Omega \Leftrightarrow M - I_1\Omega = (I_3 - I_1)\Omega_3.e_3$$

e_3 est dirigé sur l'axe de la toupie et donc colinéaire à $L = \overrightarrow{OG}$.

$M - I_1\Omega$ est donc colinéaire à L .

Il est résulte donc que $\det(M, \Omega, L) = 0$ et donc que $\dot{K} = 0$.

Remarque:

$\Omega = M - kL$ avec $k = (I_3 - I_1)\Omega_3$ puisque l'unité de longueur est $\|L\|$.

De plus, $K = ML \Rightarrow K = J\Omega L \Rightarrow K = I_3\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{K}{I_3}$, et donc

$$k = \left(1 - \frac{I_1}{I_3}\right)K$$

Notre choix d'unité permet de supposer que $I_1 = 1$; par conséquent

$$k = \left(1 - \frac{1}{I_3}\right)K$$

i.e.

$$M - \Omega = K\left(1 - \frac{1}{I_3}\right)L$$

D'autre part, la loi des aires permet d'affirmer que le moment de M par rapport à l'axe vertical fixe est conservé: $M\Gamma = C$.

L'hamiltonien est conservé, en effet il représente dans notre cas l'énergie du système. $H = \frac{1}{2}M\Omega + \Gamma L$ (somme de l'énergie cinétique de rotation et de l'énergie potentielle de pesanteur).

B-4 Expression de l'équation différentielle.

Résumons les quantités conservées; nous les supposons fixées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Gamma\|^2 = 1 \\ K = ML \\ M\Gamma = C \\ H = \frac{1}{2}M\Omega + \Gamma L \end{array} \right.$$

Décrire le vecteur Γ dans le repère mobile; ou de manière équivalente, le décrire par rapport au vecteur caractéristique L constant dans le repère mobile, revient à décrire le mouvement de la toupie.

$$\text{Soit } \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \Omega = J^{-1}M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{w}{I_3} \end{pmatrix}, H' = 2H + \left(1 - \frac{1}{I_3}\right)K^2$$

Affirmation:

$$\dot{\Gamma}_3^2 = (1 - \Gamma_3^2)(H' - K^2 - 2\Gamma_3) - (C - K\Gamma_3)^2$$

Preuve:

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \Rightarrow \dot{\Gamma}_3 = \Gamma_1 v - \Gamma_2 u$$

$$\text{On élève ensuite au carré pour obtenir: } \dot{\Gamma}_3^2 = \Gamma_1^2 v^2 + \Gamma_2^2 u^2 - 2\Gamma_1 \Gamma_2 uv$$

D'autre part, en utilisant que $K = M.L = w$ (puisque l'unité de longueur étant $\|L\|$), et $C = M\Omega$:

$$M\Gamma = C \Rightarrow u\Gamma_1 + v\Gamma_2 + K\Gamma_3 = C \Rightarrow u\Gamma_1 + v\Gamma_2 = C - K\Gamma_3$$

$$\text{En élevant au carré: } 2uv\Gamma_1\Gamma_2 = (C - K\Gamma_3)^2 - u^2\Gamma_1^2 - v^2\Gamma_2^2.$$

Ainsi on a:

$$\dot{\Gamma}_3^2 = (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)(u^2 + v^2) - (C - K\Gamma_3)^2$$

$$\text{Or } \|\Gamma\|^2 = 1 \Rightarrow \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 = 1 - \Gamma_3^2,$$

$$\text{d'où } \dot{\Gamma}_3^2 = (1 - \Gamma_3^2)(u^2 + v^2) - (C - K\Gamma_3)^2.$$

$$H = \frac{1}{2}M\Omega + \Gamma L$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \frac{1}{I_3}K^2) + \Gamma_3$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 = 2H - \frac{1}{I_3}K^2 - 2\Gamma_3$$

$$\Rightarrow \dot{\Gamma}_3^2 = (1 - \Gamma_3^2)(2H - \frac{1}{I_3}K^2 - 2\Gamma_3) - (C - K\Gamma_3)^2$$

Il reste à poser $H' = 2H + (1 - \frac{1}{I_3})K^2$ pour obtenir finalement:

$$\dot{\Gamma}_3^2 = (1 - \Gamma_3^2)(H' - K^2 - 2\Gamma_3) - (C - K\Gamma_3)^2$$

B-5 Résolution de l'équation différentielle.

On pose $x := \Gamma_3$

L'équation différentielle s'écrit:

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(H' - K^2 - 2x) - (C - Kx)^2$$

Cette équation se résout grâce à la fonction \wp de Weierstrass.

B-5.1 La fonction \wp de Weierstrass.

On se donne deux nombre complexes μ_1 et μ_2 , indépendants sur \mathbb{R} , et on considère le réseau $\Lambda = \{m\mu_1 + n\mu_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

C'est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , paire et bi-périodique.
Ses pôles sont les points du réseau Λ .

Pour le vérifier, on montre que $\wp(z)$ est une série de fonction méromorphes qui converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}-\Lambda$; sa somme est donc méromorphe sur \mathbb{C} en application du théorème de Morera.

Sur tous les disques $|z| \leq R$, on va montrer la convergence uniforme. On a $|\lambda| \geq 2R$ pour tous les λ sauf un nombre fini.

Pour tous ces λ et z dans le disque de rayon R ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| &= \left| \frac{\lambda^2 - (z-\lambda)^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2} \right| \\ &= \frac{|2\lambda z - z^2|}{|\lambda^2(z-\lambda)^2|} \\ &= \frac{|z(2 - \frac{z}{\lambda})|}{|\lambda|^3 |1 - \frac{z}{\lambda}|^2} \\ &\leq 10 \frac{R}{|\lambda|^3} \end{aligned}$$

qui converge grâce au lemme suivant:

Lemme: La série $\sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{|\lambda|^3}$ est convergente.

et grâce aux inégalités:

$$\begin{aligned} \left| 2 - \frac{z}{\lambda} \right| &\leq \frac{5}{2}, \quad \left| 1 - \frac{z}{\lambda} \right| \geq \frac{1}{2} \text{ car } |z| \leq \frac{|\lambda|}{2}; \\ \left| \lambda - \frac{z}{2} \right| &\leq |\lambda| + \left| \frac{z}{2} \right| \leq \frac{5}{4} |\lambda|, \quad |\lambda - z| \geq |\lambda| - |z| \geq \frac{|\lambda|}{2} \text{ d'après l'inégalité triangulaire.} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la bi-périodicité, on montre que $\wp(z + \mu_1) = \wp(z)$ et $\wp(z + \mu_2) = \wp(z)$.

Remarque: $\wp'(z) = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}$ et il est clair que $\wp'(z + \lambda) = \wp'(z) \forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \Lambda$.

Donc \wp' est bi-périodique. D'où

$$\frac{d}{dz} (\wp(z + \mu_1) - \wp(z)) = 0$$

donc $\wp(z + \mu_1) - \wp(z)$ est constante. On évalue cette constante en

$z = -\frac{\mu_1}{2}$ qui n'est pas un pôle et on trouve :

$$\wp\left(\frac{\mu_1}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\mu_1}{2}\right)$$

qui est nul puisque \wp est clairement paire. Le raisonnement est analogue pour μ_2 .

La fonction \wp de Weierstrass vérifie l'équation différentielle :

$$\dot{y}^2 = 4y^3 - a_1y + a_0$$

avec a_1, a_0 des constantes définies par le réseau Λ :

$$\begin{cases} a_1 = 60\sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^4} \\ a_0 = 140\sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^6} \end{cases}$$

On montre pour cela que la fonction $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - a_1\wp(z) + a_0$ est holomorphe même au voisinage de 0 et nulle en 0. Et puisqu'elle est bi-périodique, elle est holomorphe sur \mathbb{C} et donc constante; et ainsi nulle.

B-5.2 Résolution.

Comme nous l'avons vu, notre équation différentielle s'écrit:

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(H' - K^2 - 2x) - (C - Kx)^2$$

En posant $x := 2(u + \frac{H'}{12})$, on supprime le coefficient de degré deux dans le polynôme du second membre, et on obtient donc:

$$\dot{u}^2 = 4u^3 + (CK - 1 - \frac{(H')^2}{12})u + \frac{1}{4} \left(-\frac{(H')^3}{54} + \frac{(CK + 2)}{3}H' - K^2 - C^2 \right)$$

A partir de là, vu que toutes les racines de ce polynôme de degré trois sont simples (cf schéma A-6) il existe un réseau $\Lambda \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $u = \wp(z)$ est solution de cette dernière équation différentielle.

On obtient alors pour solution :

$$x = 2\left(\wp(z) + \frac{H'}{12}\right)$$

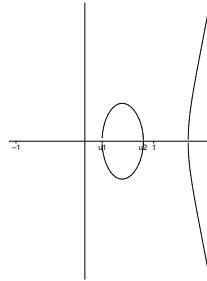
C Etude des points critiques de l'application (H,K) .

C-1 Préliminaires.

Soit ε la courbe associée à la fonction \wp de Weierstrass, c'est à dire la courbe d'équation $y^2 = f(x)$ vue précédemment.

$$(P, P') : \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} - \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ z \longmapsto (P(z), P'(z)) \in \varepsilon \end{array}$$

(partie réelle de la courbe ε d'équation $y^2 = f(x)$: Il y a deux composantes mais une seule correspond au mouvement de la toupie.)



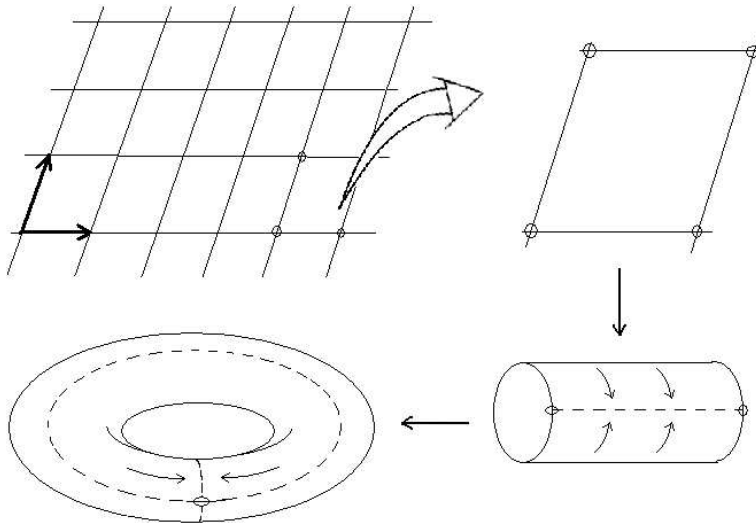
Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ le réseau associé à notre cas.

Vu la périodicité, on quotiente par Λ

$$\mathbb{C} / \Lambda - \{0\} \longrightarrow \epsilon \in \mathbb{C}^2$$

On a topologiquement un tore privé d'un point.

($\mathbb{C} / \Lambda - \{0\}$ est un tore privé d'un point.)



Pour obtenir un tore (ici \mathbb{C}/Λ), on inclut le pôle: l'image de ce pôle par l'application (P, P') est ∞ , d'où
 $(P, P') : \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \varepsilon \cup \infty$

Rappel:

$$\begin{cases} H(\Gamma, M) = \frac{1}{2}M\Omega + \Gamma L \\ K(\Gamma, M) = ML \end{cases}$$

On pose:

$$O_c := \{(\Gamma, M) / \|\Gamma\|^2 = 1, M\Gamma = C\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} f(\Gamma, M) := M\Gamma \\ g(\Gamma, M) := \|\Gamma\|^2 \end{cases}$$

$$\phi := (f, g)$$

$$(H, K) : O_c \rightarrow \mathbb{R}^2$$

On fixe les valeurs des deux intégrales premières: (h_0, k_0)

On va s'intéresser à $(H, K)^{-1}(h_0, k_0)$.

On peut démontrer que quand (h_0, k_0) est une valeur régulière, on obtient un tore.

Cherchons ces valeurs régulières.

C-2 Etude de rang.

Soit $T_{(\Gamma, M)}O_c := \text{Ker}(d\Phi_{(\Gamma, M)})$ l'espace tangent à O_c en (Γ, M) .

$$T_{(\Gamma, M)}O_c = \left\{ (X, Y) \left/ \begin{array}{l} \Gamma X + MY = 0 \\ 2\Gamma Y = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Affirmation: $(d\Phi)_{(\Gamma, M)}$ est de rang maximal si $\|\Gamma\| \neq 0$.

En effet:

$$(d\phi)_{(\Gamma, M)} : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(X, Y) \longmapsto (\Gamma X + MY, 2\Gamma Y)$$

est clairement surjective pour $\Gamma \neq 0$.

$\Rightarrow \dim \text{Ker}(d\phi) = 6 - 2 = 4$ d'après le théorème du rang.

(Γ, M) est un point critique de l'application (H, K) si $d(H, K)_{(\Gamma, M)} \big|_{T_{(\Gamma, M)}O_c}$ n'est pas surjective. (i.e (H, K) n'est pas une submersion sur O_c).

$$d(H, K)_{(\Gamma, M)} \big|_{T_{(\Gamma, M)} O_c} : T_{(\Gamma, M)} O_c \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

où $\text{Ker}(d\phi_{(\Gamma, M)})$ est de dimension 4.

$$d(H, K) = ((dH)_{(\Gamma, M)}, (dK)_{(\Gamma, M)}): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$(X, Y) \longmapsto (dH_{(\Gamma, M)}(X, Y), dK_{(\Gamma, M)}(X, Y))$$

On est donc amené à étudier le rang de la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} L & \Omega \\ 0 & L \\ M & \Gamma \\ 0 & 2\Gamma \end{bmatrix}$$

$$\text{En effet } \begin{cases} df_{(\Gamma, M)}(X, Y) = MX + \Gamma Y \\ dg_{(\Gamma, M)}(X, Y) = 2\Gamma Y \end{cases} \text{ et } \begin{cases} dH_{(\Gamma, M)}(X, Y) = LX + \Omega Y \\ dK_{(\Gamma, M)}(X, Y) = LY \end{cases}$$

Remarque:

On a vu dans la partie B) que: $M - \Omega = kL$ avec $k = (1 - \frac{1}{I_3})K$.

On fait opérer sur notre matrice des opérations élémentaires sur ses lignes qui n'affectent donc pas son rang.

$$\begin{bmatrix} L & M - kL \\ 0 & L \\ M & \Gamma \\ 2\Gamma & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} L & M \\ 0 & L \\ M & \Gamma \\ 2\Gamma & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & L \\ L & M \\ M & \Gamma \\ \Gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Pour la première étape, on a ajouté k fois la seconde ligne à la première; pour la seconde on a échangé les deux premières lignes.

On considère maintenant les vecteurs lignes: ceux-ci sont liés si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls tels que:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} M \\ \Gamma \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 L + \lambda_3 M + \lambda_4 \Gamma = 0 \\ \lambda_1 L + \lambda_2 M + \lambda_3 \Gamma = 0 \end{cases}$$

Le rang n'est pas maximal si les vecteurs M, L, Γ sont dépendants
i.e $\dim(\langle M, L, \Gamma \rangle) \leq 2$

1er cas: $\dim(\langle M, L, \Gamma \rangle) = 1$

M et Γ sont colinéaires à L , $\exists u, v \in \mathbb{R}$ tq $M = uL$ et $\Gamma = vL$. Notre matrice devient donc:

$$\begin{bmatrix} 0 & L \\ L & uL \\ uL & vL \\ vL & 0 \end{bmatrix}$$

De plus $\|\Gamma\|^2 = 1 \Rightarrow \|vL\|^2 = 1 \Rightarrow v^2 = 1 \Rightarrow v = \pm 1$

mais aussi $\Gamma M = c \Rightarrow u^2 = c^2$

$(H, K)(\Gamma, M) = (H, K)(vL, uL) = (\frac{c^2}{2I_3} + \epsilon, \epsilon c)$ avec $\epsilon = \pm 1$.

Remarque: $(H', K)(\Gamma, M) = (c^2 + 2\epsilon, \epsilon c)$

2eme cas: $\dim(\langle M, L, \Gamma \rangle) = 2$

On a vu que:

$$\begin{cases} \lambda_2 L + \lambda_3 M + \lambda_4 \Gamma = 0 \\ \lambda_1 L + \lambda_2 M + \lambda_3 \Gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} L + M + \frac{\lambda_4}{\lambda_3} \Gamma = 0 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} L + M + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \Gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa L + M + \lambda \Gamma = 0 \\ bL + M + \kappa^{-1} \Gamma = 0 \end{cases}$$

avec $\kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, $\lambda = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}$

$$\Rightarrow \kappa L + M + \kappa^{-1} \Gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2 \Gamma + \kappa M + L = 0$$

C-3 Paramétrisation de la fonction (H, K) .

$$\kappa^2 \Gamma + \kappa M + L = 0 \Leftrightarrow \|a^2 \Gamma + aM + L\|^2 = 0$$

On développe l'expression: $\|a^2 \Gamma + aM + L\|^2 =: P(a)$

$$P(a) = a^4 + 2ca^3 + 2a^2(\Gamma L + \frac{M^2}{2}) + 2aK + 1$$

On utilise le fait que $H + \frac{kK}{2} = \Gamma L + \frac{M^2}{2}$ pour obtenir:

$$\|a^2\Gamma + aM + L\|^2 = a^4 + 2ca^3 + 2a^2(H + \frac{kK}{2}) + 2aK + 1$$

Il s'agit d'un polynôme de degré 4 positif puisque c'est un carré. Si t est racine alors c'est une racine double.

Soit t une racine du polynôme $\|a^2\Gamma + aM + L\|^2$.

On obtient alors que $P(a) = (a - t)^2(a^2 + \alpha a + \beta)$ avec α, β des réels.

On procède par identification:

$$\|a^2\Gamma + aM + L\|^2 - (a-t)^2(a^2 + \alpha a + \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2(c-t) \\ v = \frac{1}{t^2} \\ H = \frac{k}{2}t^3 + (\frac{kc}{2} - 3)t^2 - 4ct - \frac{k}{2t} + \frac{1}{t^2} \\ K = t^3 + ct^2 - \frac{1}{t} \end{cases}$$

On a donc une paramétrisation de l'image de (H, K) :

$$\begin{cases} H = \frac{k}{2}t^3 + (\frac{kc}{2} - 3)t^2 - 4ct - \frac{k}{2t} + \frac{1}{t^2} \\ K = t^3 + ct^2 - \frac{1}{t} \end{cases}$$

On peut cependant grandement simplifier le problème. Il suffit d'effectuer un changement de variable, celui-là même qui fut utilisé dans la partie B), à savoir:

$$H' = 2H + (1 - \frac{1}{I_3})K^2$$

Affirmation: (H, K) et (H', K) ont le même rang en tout point (Γ, M) .

Preuve:

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \left(2x + \left(1 - \frac{1}{I_3} \right) y^2, y \right) \end{aligned}$$

D'où:

$$d(H', K)_{(\Gamma, M)} = d\sigma_{(H, K)} \circ d(H, K)_{(\Gamma, M)}$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(d(H', K)_{(\Gamma, M)}) = d\sigma \circ \text{Ker}(d(H, K)_{(\Gamma, M)})$$

$$\text{i.e. } T_{(\Gamma, M)}(H, K) = d\sigma \circ T_{(\Gamma, M)}(H', K)$$

Or, σ a pour jacobienne au point (x, y) la matrice: $\begin{bmatrix} 2 & 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Donc $d\sigma$ est un isomorphisme pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. σ est un difféomorphisme local et même un difféomorphisme puisque bijectif.

$d\sigma_{(x, y)}$ est de rang 2 donc (H, K) et (H', K) ont le même rang en tout point (Γ, M) .

On va donc étudier de manière équivalente les points critiques de la fonction (H', K) .

A présent, nous obtenons que:

$$\|a^2\Gamma + aM + L\|^2 = a^4 + 2ca^3 + 2a^2(H') + 2aK + 1$$

Puis, avec un raisonnement analogue :

$$\|a^2\Gamma + aM + L\|^2 - (a-t)^2(a^2 + \alpha a + \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2(c-t) \\ v = \frac{1}{t^2} \\ H' = -3t^2 - 4ct + \frac{1}{t^2} \\ K = t^3 + ct^2 - \frac{1}{t} \end{cases}$$

La paramétrisation est alors nettement plus simple:

$$\begin{cases} H' = -3t^2 - 4ct + \frac{1}{t^2} \\ K = t^3 + ct^2 - \frac{1}{t} \end{cases}$$

C-4 Les Singularités.

La courbe (H', K) possède manifestement deux branches: l'une pour $t > 0$ et l'autre pour $t < 0$.

Etude de la fonction $K(t)$:

Nous allons dans un premier cas nous intéresser au cas $t > 0$.

$\forall t > 0, K^{(3)}(t) > 0 \Rightarrow K''$ est strictement croissante.

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} K''(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} K''(t) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \exists \xi \in]0, +\infty[\text{ tq } K''(t) = 0$$

$$K''(\xi) = 0 \Leftrightarrow K'(\xi) = 3\left(\frac{1}{\xi^2} - \xi^2\right)$$

$$K'(\xi) \geq 0 \Leftrightarrow \xi \leq 1 \Leftrightarrow c \geq -2$$

Enfin, si $c < -2$ i.e $K'(\xi) < 0$, $\exists \xi_1, \xi_2$ des réels strictement positifs dans un voisinage de ξ qui annulent $K'(t)$.

Ce sont les racines de l'équation $3t + 2ct^3 + 1 = 0$ avec $t > 0$ et $c < -2$.

	t	0^+	ξ_1	ξ	ξ_2	$+\infty$
$c \geq -2$	$K(t)$					
$c < -2$	$K(t)$					

Pour le cas $t < 0$, on obtient le tableau de variation suivant:

	t	$-\infty$	$\tilde{\xi}_1$	$\tilde{\xi}$	$\tilde{\xi}_2$	0^-
$c \leq 2$	$K(t)$	$-\infty$	→ $+\infty$			
$c > 2$	$K(t)$	$-\infty$	↗	↘		↗ $+\infty$

où $\tilde{\xi}$ est l'unique racine négative de $K''(t)$, $\tilde{\xi}_1$ et $\tilde{\xi}_2$ sont les deux racines négatives de $K'(t)$ pour $c > 2$,
c'est à dire qu'elles vérifient l'équation: $3t^4 + 2ct^3 + 1 = 0$ avec les conditions $t < 0$ et $c > 2$.

Etude de la fonction $H'(t)$:

On va dans un premier temps d'intéresser au cas $t > 0$.

$\frac{d^2}{dt^2}H'(t) > 0 \Leftrightarrow t < 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}H'(t)$ est strictement croissante pour $t < 1$ et strictement décroissante pour $t > 1$.

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d}{dt}H'(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt}H'(t) = -\infty \\ \frac{d}{dt}H'(1) = -4(c+2); \frac{d}{dt}H'(1) \leq 0 \Leftrightarrow c \geq -2 \end{cases}$$

Dans le cas contraire, si $c < -2$, $\frac{d}{dt}H'(t)$ a deux racines positives ζ_1 et ζ_2 dans un voisinage de 1.

Elles vérifient l'équation $3t^4 + 2ct^3 + 1 = 0$ avec $t > 0$ et $c < -2$.

Autrement dit, $\zeta_1 = \xi_1$ et $\zeta_2 = \xi_2$

	t	0^+	ξ_1	1	ξ_2	$+\infty$
$c \geq -2$	$H'(t)$	$+\infty$	→ $-\infty$			
$c < -2$	$H'(t)$	$+\infty$	↘	↗		↘ $-\infty$

Pour le cas $t < 0$,

Soient $\tilde{\zeta}_1$ et $\tilde{\zeta}_2$ les deux racines négatives de $\frac{d}{dt}H'(t)$ pour $c > 2$.

C'est à dire qu'elles vérifient l'équation $3t^4 - 2ct^3 - 1 = 0$ avec les conditions $t < 0$ et $c > 2$.

Autrement dit, $\tilde{\zeta}_1 = \tilde{\xi}_1$ et $\tilde{\zeta}_2 = \tilde{\xi}_2$

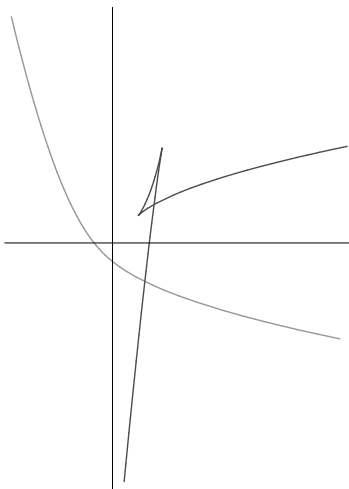
	t	$-\infty$	$\tilde{\xi}_1$	-1	$\tilde{\xi}_2$	0^-
$c \leq 2$	$H'(t)$	$-\infty$	→ $+\infty$			
$c > 2$	$H'(t)$	$-\infty$	↗	↘		↗ $+\infty$

Pour résumer, on recense deux cas différents. Il sont observés soit pour $|c| > 2$ ou $|c| \leq 2$.

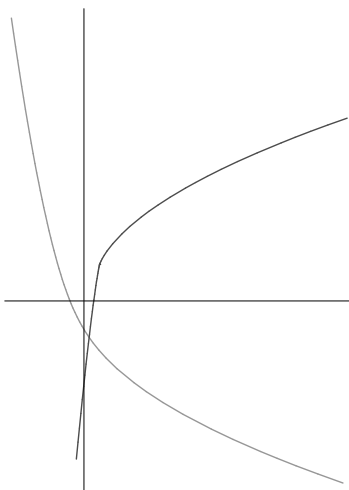
Dans tous les cas les deux branches s'intersectent. Et en ce point $\|a^2\Gamma + aM + L\|^2$ a deux racines doubles réelle.

Dans le cas où $|c| > 2$ l'une des deux branches s'intersecte elle-même. Il s'agit de la branche obtenue pour $t > 0$ si $c \in]2, +\infty[$, ou de la branche obtenue pour $t < 0$ si $c \in]-\infty, -2[$. Là encore on a deux racines doubles réelles.

(abscisses: H' , ordonnées: K)

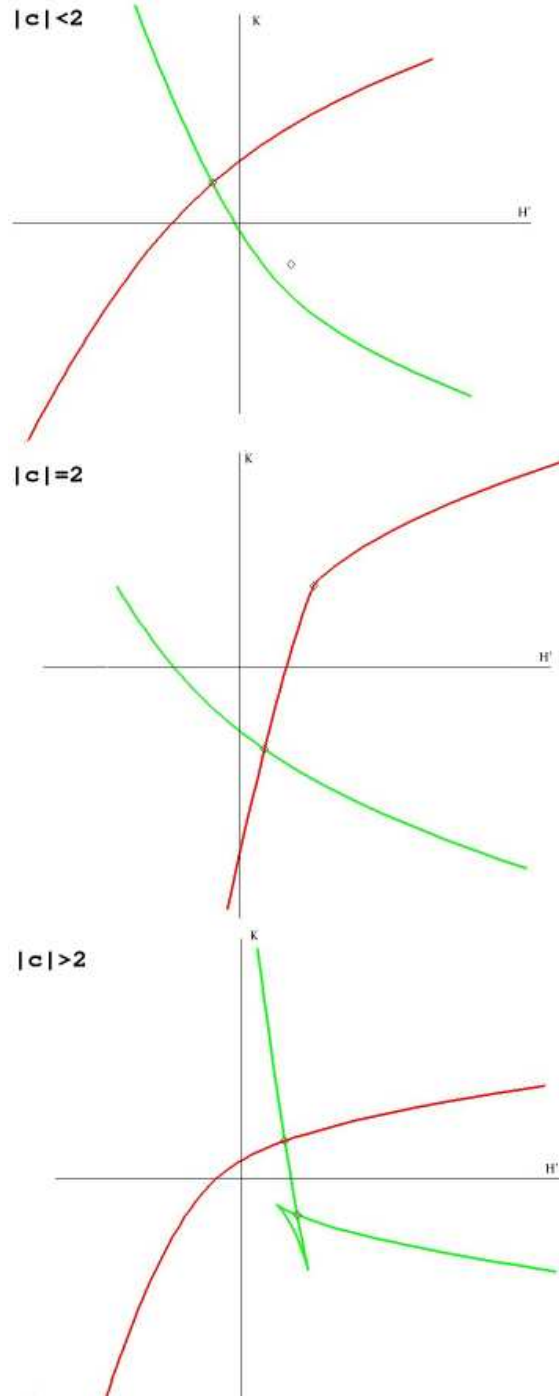


Dans le cas où $|c| \leq 2$ les croissances des fonctions H' et K sont monotones et on obtient le cas de figure suivant:



Finalement, on inclut sur notre schéma le point $(H', K) = (c^2 + 2\varepsilon, \varepsilon c)$, avec $\varepsilon = \pm 1$, en lequel $\|a^2\Gamma + aM + L\|^2$ a 2 racines doubles conjuguées pour $|c| < 2$ et une racine quadruple pour $|c| = 2$:

image de l'application (H', K)



Bibliographie:

- [1] ARNOLD V.I *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 2nd edition.
- [2] AUDIN M. *De la Toupie aux courbes algébriques*, L'Ouvert n°67 - Juin 1992.
- [3] AUDIN M. *Analyse complexe (licence de mathématiques)*, 1998.
- [4] GIGNOUX C. et SILVESTRE-BRAC B., *MECANIQUE-De la formulation Lagrangienne au chaos Hamiltonien*, EDP Sciences, 2002.