

# Fonctions harmoniques et distribution asymptotique des valeurs propres du laplacien

Par Gilles STUPFLER  
sous la direction de M. Vilmos KOMORNIK

19 septembre 2007

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Fonctions harmoniques</b>	<b>3</b>
1.1 Premiers résultats	3
1.2 Solution du problème de Dirichlet pour un disque	5
1.2.1 Résolution du problème	5
1.2.2 Une autre expression	7
1.2.3 Des hypothèses moins fortes	8
1.2.4 Propriétés fondamentales des fonctions harmoniques	9
1.3 Existence d'une solution au problème de Dirichlet	16
<b>2 Distribution des valeurs propres du laplacien</b>	<b>25</b>
2.1 Motivation	25
2.2 Eléments théoriques	26
2.2.1 Formule de Gauss-Ostrogradski, formule de Green	26
2.2.2 Rappels sur les séries de Fourier	27
2.3 Premiers résultats	27
2.4 Propriétés des valeurs propres	31
2.5 Etude asymptotique	40
2.5.1 Un cas particulier : le rectangle	40
2.5.2 Estimation des valeurs propres pour le rectangle	42
2.5.3 Cas du disque	48
2.5.4 Cas du triangle rectangle	50
2.5.5 Cas d'un ouvert connexe borné de classe $\mathcal{C}^1$	52
2.5.6 Estimation du terme d'erreur	60
<b>Annexe</b>	<b>62</b>
Théorème de Gauss-Ostrogradski	62
Lemme 2.5.8	69
<b>Remerciements</b>	<b>71</b>
<b>Notations</b>	<b>72</b>

# Introduction

De nombreux problèmes physiques se ramènent à la résolution d'une équation dans laquelle intervient le laplacien  $\Delta$ <sup>1</sup>. Citons quelques exemples :

1. En électromagnétisme, l'équation donnant le potentiel électrostatique  $V$  créé par une distribution volumique de charge  $\rho$  est  $\Delta V = \rho/\epsilon_0$ , où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide (équation de Poisson).
2. En thermodynamique, l'équation donnant la distribution de la température  $T$  dans un solide, en régime stationnaire, est  $\Delta T = 0$  (équation de la chaleur).
3. Toujours en thermodynamique, l'équation donnant la diffusion des molécules dans un fluide en régime stationnaire est  $\Delta c = 0$ , où  $c$  est la concentration des ces molécules (deuxième loi de Fick).
4. L'équation des ondes  $\Delta u - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0$  apparaît en électromagnétisme, ou en acoustique.

L'opérateur laplacien apparaît donc dans des domaines variés de la physique, et la résolution d'une équation comportant un laplacien est en général assez difficile. Le but de ce mémoire est de présenter quelques propriétés du laplacien qui sont utiles pour résoudre certains problèmes physiques. On étudiera en premier lieu l'équation  $\Delta u = 0$  avec des conditions aux limites particulières, appelées conditions de Dirichlet. On verra que les fonctions solutions d'un tel type de problème ont des propriétés surprenantes. Ensuite, on se focalisera plus particulièrement sur la distribution asymptotique des valeurs propres du laplacien sur un domaine connexe borné ayant une frontière de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ceci a un intérêt en physique des ondes, et plus particulièrement en acoustique : en effet, on peut prédire les notes produites par un tambour simplement en le regardant, si on connaît la distribution asymptotique des valeurs propres du laplacien sur un ouvert dont l'aire est celle de la membrane du tambour. On étudiera à cet effet un cas simple, qui est celui d'un domaine rectangulaire de  $\mathbb{R}^2$ , pour ensuite étendre les résultats.

---

<sup>1</sup>Les notations utilisées sont rappelées à la fin de ce mémoire.

# Chapitre 1

## Fonctions harmoniques

L'objectif de cette partie est d'étudier quelques propriétés des solutions de l'équation  $\Delta u = 0$ , d'introduire la notion de problème de Dirichlet, et de montrer l'existence et l'unicité de la solution à ce type de problème sous certaines hypothèses. On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ , et on note  $d(x, y) = \|x - y\|_2$ . Pour plus d'informations, se reporter à [1].

### 1.1 Premiers résultats

Commençons par définir notre cadre de travail :

**Définition 1.1.1.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Si  $\Delta u = 0$  sur  $U$ , alors  $u$  est dite *harmonique* sur  $U$ .

**Exemples :**

1. La fonction  $u$  définie par  $u(x, y) = x^2 - y^2$  est harmonique sur  $U = \mathbb{R}^2$ .
2. La fonction  $u$  définie par  $u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$  est harmonique sur  $U = (\mathbb{R}^*)^2$ .

Dans toute la suite de ce chapitre, on note  $O$  un ouvert connexe borné non vide de  $\mathbb{R}^2$ . Il est clair que l'ensemble des fonctions harmoniques sur  $O$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On définit ensuite ce qu'est un problème de Dirichlet : soit  $f$  une application continue sur  $Fr(O)$ . Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction harmonique  $u$  continue sur  $\overline{O}$  telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } O \\ u = f & \text{sur } Fr(O). \end{cases}$$

Un exemple de problème de Dirichlet concret est la détermination de la température à l'intérieur d'un corps, connaissant la température à l'interface entre ce corps et l'air ambiant. Avec ces deux définitions, on peut déjà établir quelques résultats spectaculaires, dont le

**Théorème 1.1.2. (*Théorème du minimum et du maximum*)**

Soit  $u$  une application harmonique sur  $O$  et continue sur  $\overline{O}$ . Alors, on a :

$$\forall (x, y) \in O, \quad \inf_{Fr(O)} u \leq u(x, y) \leq \sup_{Fr(O)} u.$$

Autrement dit, sur  $O$ ,  $u$  ne peut prendre de valeurs plus grandes que son maximum sur  $Fr(O)$  et plus petites que son minimum sur  $Fr(O)$ .

*Démonstration.* Notons  $m = \sup_{Fr(O)} u$ , et supposons que  $u$  prenne en un point de  $O$  une valeur strictement plus grande que  $m$ . Alors  $M = \sup_{\bar{O}} u > m$ , et ce maximum est atteint en un certain point  $P \in O$ . On déplace l'origine du repère jusqu'en  $P$ , ce qui ne change rien quant à l'harmonicité de  $u$ . On considère alors l'application  $v : O \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$\forall (x, y) \in O, v(x, y) = u(x, y) + \frac{M - m}{2d^2}(x^2 + y^2),$$

où  $d$  est le diamètre de  $O$  pour la norme euclidienne. Alors  $v(0, 0) = u(0, 0) = M$ , et d'autre part, on a :

$$\forall (x, y) \in Fr(O), v(x, y) < m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M,$$

donc  $v$  atteint son maximum en un point de  $O$ . Pourtant, on a, sur  $O$  :

$$\Delta v(x, y) = \Delta u(x, y) + 2\frac{M - m}{d^2} = 2\frac{M - m}{d^2} > 0,$$

mais une fonction atteignant son maximum en un point ne peut avoir aucune de ses dérivées partielles strictement positive en ce point, d'où la contradiction recherchée. Pour prouver l'assertion sur le minimum, on refait la démonstration avec la fonction  $-u$ .  $\square$

Une application harmonique a donc un comportement très particulier sur  $O$ . On déduit de ce théorème l'unicité de la solution au problème de Dirichlet :

**Corollaire 1.1.3.** *Il y a unicité de la solution au problème de Dirichlet.*

*Démonstration.* Si  $u_1$  et  $u_2$  sont solutions d'un même problème de Dirichlet, alors on a  $u_1 - u_2 \equiv 0$  sur  $Fr(O)$ . Le théorème précédent implique

$$\forall (x, y) \in O, 0 \leq u_1(x, y) - u_2(x, y) \leq 0,$$

soit :  $\forall (x, y) \in O, u_1(x, y) = u_2(x, y)$ .  $\square$

Pour finir ce paragraphe, démontrons un lemme qui sera très utile pour la suite :

**Lemme 1.1.4.** *Soit  $(u_n)$  une suite d'applications harmoniques sur  $O$  et continues sur  $Fr(O)$ . Si la suite  $(u_n)$  converge uniformément sur  $Fr(O)$ , alors elle converge uniformément sur  $\bar{O}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Appliquons le critère de Cauchy uniforme à la suite  $(u_n)$  :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p, q > N \Rightarrow \forall (x, y) \in Fr(O) \quad |u_p(x, y) - u_q(x, y)| < \varepsilon.$$

Mais les fonctions  $(u_n)$  sont toutes harmoniques, donc la fonction  $u_p - u_q$  est également harmonique pour tous entiers  $p$  et  $q$  :  $u_p - u_q$  satisfait le théorème du minimum et du maximum, et on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p, q > N \Rightarrow \forall (x, y) \in O \quad |u_p(x, y) - u_q(x, y)| < \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  converge uniformément sur  $\bar{O}$ .  $\square$

Ces quelques propriétés vont nous permettre de montrer l'existence d'une solution au problème de Dirichlet pour un disque, le but étant ensuite de généraliser ceci à un ouvert connexe borné possédant certaines propriétés topologiques.

## 1.2 Solution du problème de Dirichlet pour un disque

Soit  $f = f(s)$  une fonction continue sur le bord d'un disque de centre  $A$  et de rayon 1, où  $s$  désigne l'abscisse curviligne d'un point du cercle mesurée à partir d'un certain point  $M$  du cercle. On suppose que  $f(0) = f(2\pi)$ . Le but est de construire une fonction  $u$  continue sur le disque fermé, harmonique sur l'intérieur du disque et égale à  $f$  sur le bord du disque. On fait alors un changement d'origine et d'axes, de sorte que la nouvelle origine soit le centre du cercle, et que l'axe des  $x$  passe par le point  $s = 0$ . On passe alors en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , en prenant comme pôle notre nouvelle origine, et comme axe polaire le nouvel axe des  $x$ . L'équation du cercle est alors  $r = 1$ , et on peut écrire  $f(s) = f(\theta)$ . Après ces quelques simplifications, nous pouvons commencer à résoudre le problème.

### 1.2.1 Résolution du problème

On procède par analyse-synthèse.

**Analyse** : Supposons que  $f$  soit continue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (nous montrerons plus tard que cette hypothèse est inutile). En coordonnées polaires, l'équation  $\Delta u = 0$  devient :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \quad (1.1)$$

Cherchons une solution de cette équation sous la forme  $u(r, \theta) = v(r)w(\theta)$ . En remplaçant dans (1.1), on obtient :

$$v''(r)w(\theta) + \frac{v'(r)w(\theta)}{r} + \frac{v(r)w''(\theta)}{r^2} = 0$$

soit :

$$\underbrace{\left[ v''(r) + \frac{v'(r)}{r} \right]}_{\text{indépendant de } \theta} \frac{r^2}{v(r)} = \underbrace{-\frac{w''(\theta)}{w(\theta)}}_{\text{indépendant de } \rho} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit de discuter les valeurs possibles de  $\lambda$ . En écrivant que  $v'' + \lambda v = 0$ , et que  $v(0) = v(2\pi)$ , on constate que  $v$  est  $2\pi$ -périodique, et donc que  $\lambda = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On a alors  $v(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$ ,  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . On a ainsi  $r^2 v''(r) + r v'(r) - n^2 v(r) = 0$ . Cette équation est linéaire homogène du second ordre, donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. On constate qu'elle admet les deux solutions linéairement indépendantes  $r \mapsto r^n$  et  $r \mapsto r^{-n}$ . Mais puisque  $r \mapsto r^{-n}$  est discontinue en  $r = 0$ , on en déduit que les solutions de (1.1) continues sur  $D(A, 1)$  sont de la forme :

$$u_n(r, \theta) = r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)].$$

Dans le cas  $n = 0$ , on obtient la solution  $u_0(r, \theta) = \text{constante}$  qu'on choisit de noter  $\frac{a_0}{2}$ . Considérons maintenant la fonction

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)].$$

Si les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont bornées par un certain réel  $M$ , alors on a :

$$|u(r, \theta)| \leq \frac{M}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2Mr^n \quad \forall r, \theta \in [0, 1[ \times [0, 2\pi],$$

ce qui montre que  $u(r, \theta)$  est bien définie sur  $D(A, 1)$ . Si on se donne de plus  $r < 1$ , et un réel  $r_1$  tel que  $r < r_1 < 1$ , alors on a

$$\begin{aligned} \left| u(r, \theta) - \sum_{k=0}^n u_k(r, \theta) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(r, \theta) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(r, \theta)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2Mr_1^k. \end{aligned}$$

Donc la série  $\sum_{k=0}^n u_k(r, \theta)$  converge uniformément vers  $u(r, \theta)$  sur  $D(A, r_1)$ . Les  $u_n$  étant des fonctions continues sur ce disque,  $u$  est continue sur  $D(A, r_1)$ , donc sur  $D(A, r)$  pour tout  $r < 1$ . En faisant tendre  $r$  vers 1, on obtient que  $u$  est continue sur  $D(A, 1)$ .

On montre de même que  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D(A, 1)$ , sachant que  $r^n = o(1/n^k)$  pour tout entier  $k > 0$  et tout  $r < 1$ . On peut donc dériver terme à terme la fonction  $u$ , et on remarque alors que  $u$  est harmonique sur  $D(A, 1)$ . De plus, on a

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)].$$

**Synthèse** : Si on prend alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi,$$

c'est-à-dire les coefficients de Fourier de  $f$ , on a

$$u(1, \theta) = f(\theta),$$

et les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont clairement bornées. Il ne reste qu'à vérifier que  $u$ , définie de cette manière, est continue sur  $\overline{D}(A, 1)$ . On a :

$$|u(1, \theta)| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| + |b_n|,$$

et cette somme converge car  $f$  est continue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. La série

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)].$$

avec  $a_n$  et  $b_n$  les coefficients de Fourier de  $f$  est donc harmonique sur  $D(A, 1)$ , continue sur  $\overline{D}(A, 1)$  et égale à  $f$  sur  $C(A, 1)$  :  $u$  est la solution du problème de Dirichlet considéré.

## 1.2.2 Une autre expression

A partir de l'expression de  $u$  obtenue au paragraphe précédent, il est possible d'exprimer  $u$  sous forme d'une intégrale. Soit  $r < 1$ , on a :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n\psi) \cos(n\theta) d\psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin(n\psi) \sin(n\theta) d\psi \right] \end{aligned}$$

soit, avec  $\cos(n\psi) \cos(n\theta) + \sin(n\psi) \sin(n\theta) = \cos(n(\psi - \theta))$ ,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n(\psi - \theta)) d\psi \right]$$

Or on a

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n(\psi - \theta)) d\psi \right] \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{\psi \in [0, 2\pi]} |f(\psi)| r^n$$

par inégalité de la moyenne, donc on peut appliquer le théorème de Beppo-Levi : on a

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(\psi - \theta)) \right] d\psi.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(\psi - \theta)) &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in(\psi - \theta)} \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{r e^{i(\psi - \theta)}}{1 - r e^{i(\psi - \theta)}} \right) \end{aligned}$$

Et, en multipliant numérateur et dénominateur de la fraction par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{r e^{i(\psi - \theta)}}{1 - r e^{i(\psi - \theta)}} = \frac{r e^{i(\psi - \theta)} - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(\psi - \theta)) &= 1 + 2 \frac{r \cos(\psi - \theta) - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2} \\ &= \frac{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2 + 2r \cos(\psi - \theta) - 2r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2} \end{aligned}$$

$$\text{soit } 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(\psi - \theta)) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2}.$$

Finalement, on a

$$\forall r < 1 \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \theta) + r^2} d\psi,$$



intégrale qui est aussi appelée *intégrale de Poisson*.

Si le cercle n'est pas de rayon 1, mais de rayon  $R$ , l'intégrale devient :

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\frac{s}{R} - \theta) + r^2} ds$$

(on remplace  $r$  par  $\frac{r}{R}$  et la variable d'intégration devient  $s = R\psi$ ).

### 1.2.3 Des hypothèses moins fortes

Pour finir la discussion sur la résolution du problème de Dirichlet pour un cercle, on va montrer que l'hypothèse " $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux" est inutile. Supposons que  $f$  est continue, sans autre hypothèse de régularité.

Remarquons que l'application  $h : (s, r, \theta) \mapsto \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\frac{s}{R} - \theta)}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en chacune des trois variables, en tout  $(s, r, \theta) \in [0, 2\pi R] \times [0, R] \times [0, 2\pi]$ . Donc, en notant comme précédemment

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\frac{s}{R} - \theta) + r^2} ds,$$

$u$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , car l'intégration se fait sur un compact. On a par ailleurs  $\Delta h = 0$  (par un calcul fastidieux qui ne sera pas détaillé ici), ce qui implique  $\Delta u = 0$ . Donc  $u$  est harmonique sur  $D(A, R)$ . Montrons maintenant que la fonction  $\tilde{u}$  définie par :

$$\tilde{u}(r, \theta) = \begin{cases} u(r, \theta) & \text{si } r < R \\ f(R\theta) & \text{si } r = R \end{cases}$$

est continue sur le disque fermé  $\overline{D}(A, 1)$ .

Par un théorème de Stone-Weierstrass, puisque  $f$  est continue, soit  $(f_n)$  une suite de polynômes convergeant uniformément vers  $f$  sur  $C(A, 1)$ . Alors la suite de fonctions

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f_n(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\frac{s}{R} - \theta) + r^2} ds,$$

vérifie toutes les propriétés établies en 1.2.1, puisque les  $(f_n)$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En particulier, on a  $u_n(R, \theta) = f_n(R\theta)$ , donc la suite  $(u_n)$  converge uniformément sur le bord du disque. Puisque les  $(u_n)$  sont harmoniques sur  $D(A, 1)$ , par le lemme 1.1.4, la suite  $(u_n)$  converge uniformément sur le disque fermé, ce qui implique que  $\tilde{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  est continue sur le disque fermé, en tant que limite uniforme de fonctions continues.

## 1.2.4 Propriétés fondamentales des fonctions harmoniques

Dans cette section, nous allons montrer quelques résultats utiles sur les fonctions harmoniques. Les preuves de toutes ces propriétés sont basées sur le fait que toute application harmonique est représentable sous la forme d'une intégrale de Poisson.

### **Théorème 1.2.1.** (“Moyenne arithmétique”)

Soit  $D$  un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons  $u$  harmonique sur  $D$  et continue sur  $\overline{D}$ . Alors la valeur de  $u$  au centre de  $D$  est égale à la moyenne des valeurs de  $u$  sur  $Fr(D)$ .

*Démonstration.* On déplace l'origine du repère au centre du disque, et on écrit  $u$  sous la forme d'une intégrale de Poisson :

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\frac{s}{R} - \theta) + r^2} ds,$$

avec :  $\forall s \in [0, 2\pi R], f(s) = u\left(R, \frac{s}{R}\right)$ , et on a donc  $u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) ds$ , soit  $u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} u\left(R, \frac{s}{R}\right) ds$ . En d'autres termes, la valeur de  $u$  au centre du disque est la moyenne arithmétique des valeurs de  $u$  sur le bord du disque, ce qu'on voulait montrer.  $\square$

Montrons maintenant un résultat puissant concernant l'analyticité d'une fonction harmonique :

**Théorème 1.2.2.** Soit  $u$  une fonction harmonique sur un ouvert connexe borné non vide  $O$ . Alors, en tout point  $(x_0, y_0)$  de  $O$ ,  $u$  est analytique en  $x$  et  $y$ .

*Démonstration.* Soit  $(x_0, y_0) \in O$ , et soit  $R > 0$  tel que  $D((x_0, y_0), R) \subset O$ . On déplace l'origine du repère en  $(x_0, y_0)$ , pour pouvoir écrire la formule habituelle : si un point  $(x, y) \in D((x_0, y_0), R)$  a pour coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\frac{s}{R} - \theta) + r^2} ds.$$

Nous allons maintenant démontrer un lemme de calcul :

**Lemme 1.2.3.**  $\forall r < R, \forall \psi, \theta, \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\psi - \theta)} = -1 + \operatorname{Re} \left[ \frac{2R}{R - re^{i(\theta - \psi)}} \right]$ .

*Démonstration du lemme.* On a

$$\begin{aligned} -1 + \frac{2R}{R - re^{i(\theta - \psi)}} &= \frac{R + re^{i(\theta - \psi)}}{R - re^{i(\theta - \psi)}} \\ &= \frac{(R + re^{i(\theta - \psi)})(R - re^{i(\psi - \theta)})}{(R - re^{i(\theta - \psi)})(R - re^{i(\psi - \theta)})} \\ &= \frac{R^2 - Rre^{i(\psi - \theta)} + Rre^{i(\theta - \psi)} - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\psi - \theta)} \\ &= \frac{R^2 - r^2 + 2iRr \sin(\theta - \psi)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\psi - \theta)} \end{aligned}$$

et on prend la partie réelle des deux membres, ce qui montre le résultat annoncé.  $\square$

Par ailleurs, on a :

$$2 \frac{R}{R - re^{i(\theta-\psi)}} = 2 \frac{iRe^{i\psi}}{i[Re^{i\psi} - re^{i\theta}]},$$

ce qui permet d'écrire :

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) ds + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) \frac{iR \exp(i\frac{s}{R})}{i[R \exp(i\frac{s}{R}) - r \exp(i\theta)]} ds \right].$$

Notons à présent  $z = x + iy = r \exp(i\theta)$  et  $\alpha = R \exp(i\frac{s}{R})$ , on a, puisque  $f$  donne les valeurs de  $u$  sur le bord du disque :

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(s) ds + \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{i\pi R} \oint \frac{f(\alpha) d\alpha}{\alpha - z} \right],$$

où  $\oint$  représente l'intégration sur le bord du disque.

Par le théorème de la moyenne arithmétique, la première intégrale vaut  $-u(0, 0)$ . La deuxième intégrale, en écrivant  $\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha[1 - \frac{z}{\alpha}]}$ , est une application analytique en  $z$  (on peut intégrer terme à terme car une série entière est normalement convergente sur tout compact inclus dans son disque de convergence).

Donc  $u$ , partie réelle d'une application analytique en  $z$ , est analytique en  $x$  et  $y$ .  $\square$

Le théorème de la moyenne arithmétique permet aussi d'améliorer le théorème du minimum et du maximum :

**Théorème 1.2.4. (Théorème du minimum et du maximum, forme forte)**

Soit  $O$  une partie ouverte connexe bornée non vide de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $u$  une application harmonique sur  $O$ . S'il existe  $A \in O$  tel que  $u(A) = \sup_{\overline{O}} u$ , alors  $u$  est constante.

*Démonstration.* Soient un tel point  $A$ , et  $\rho > 0$  tel que  $\overline{D}(A, \rho) \subset O$ . Alors, par le théorème de la moyenne arithmétique,  $u(A)$  est la moyenne des valeurs prises par  $u$  sur la frontière de  $D(A, \rho)$ . Mais  $u$  atteint son maximum en  $A$ , donc les valeurs prises par  $u$  sur la frontière du disque sont inférieures ou égales à  $u(A)$ . Ainsi,  $u$  est nécessairement constante sur la frontière du disque. En répétant cette démonstration pour tout  $r < \rho$ , on obtient que  $u$  est constante sur  $D(A, \rho)$  et sur sa frontière. Donc :  $u$  est constante sur  $\overline{D}(A, \rho)$ .

Soit maintenant  $B \in \overline{D}(A, \rho)$ . Il existe  $\rho' > 0$  tel que  $\overline{D}(B, \rho') \subset O$ . Par ce qui précède,  $u(B) = u(A)$ , et la même idée montre que  $u$  est constante sur  $\overline{D}(B, \rho')$ .

Soit alors  $C \in O$ .  $O$  étant connexe, il existe un chemin  $\gamma \subset O$  continu joignant  $A$  à  $C$  (car dans  $\mathbb{R}^N$ , connexe  $\Leftrightarrow$  connexe par arcs). Le lemme de topologie suivant va permettre de conclure :

**Lemme 1.2.5.** Pour tout ouvert borné  $O \subset \mathbb{R}^N$  et tout chemin  $\gamma \subset O$  continu, on a

$$d(\gamma, \operatorname{Fr}(O)) = \inf_{x \in \gamma, y \in \operatorname{Fr}(O)} d(x, y) > 0.$$

*Démonstration du lemme.* Par propriété de la borne inférieure, soient deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de points de  $\gamma$  et  $\text{Fr}(O)$  respectivement, telles que

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(\gamma, \text{Fr}(O)).$$

$\gamma$  est fermé (c'est un chemin) et borné, donc est un compact de  $\mathbb{R}^N$ , donc on peut extraire une suite  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  qui converge vers  $x \in \gamma$ . De même,  $\text{Fr}(O)$  étant un fermé borné, c'est un compact de  $\mathbb{R}^N$ , donc on peut extraire une suite  $(y_{n_{k_p}})$  de  $(y_{n_k})$  qui converge vers  $y \in \text{Fr}(O)$ . Alors on a  $d(\gamma, \text{Fr}(O)) = d(x, y)$ . Or par définition  $x \in \gamma \subset O$ , donc il existe  $\rho_0 > 0$  tel que  $D(x, \rho_0) \subset O$ . Et ainsi  $d(\gamma, \text{Fr}(O)) = d(x, y) > \rho_0 > 0$ .  $\square$

On revient à la démonstration du théorème : on construit alors une suite finie de disques  $D_1, \dots, D_n$  tels que le centre de  $D_1$  soit  $A$ , le centre de  $D_n$  soit  $C$ , le centre de  $D_k$  pour  $2 \leq k \leq n-1$  soit l'intersection de  $\gamma$  avec  $D_{k-1}$ , et tels que  $\gamma \subset \bigcup_{k=1}^n D_k$ ; ceci est possible précisément car la distance de  $\gamma$  à la frontière de  $O$  est strictement positive, disons  $\rho_0$ , et ainsi chaque disque peut être pris de rayon  $\rho_0$ , et "couvre" une longueur de chemin au moins égale à  $\rho_0$ . Puisque  $\gamma$  a une longueur  $L$  finie, cette construction nécessite au maximum  $\lceil L/\rho_0 \rceil + 1$  disques. Un raisonnement identique à celui fait précédemment montre que  $u$  est constante sur chaque  $D_k$ , et en particulier  $u(C) = u(A)$ . Donc  $u$  est constante sur  $O$ .  $\square$

Nous allons maintenant montrer deux théorèmes sur la convergence de fonctions harmoniques, dus à Harnack.

**Théorème 1.2.6. (Premier théorème de Harnack)**

*Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions harmoniques sur  $O$  et continues sur  $\overline{O}$ . Si la suite  $(u_n)$  converge uniformément sur  $\text{Fr}(O)$ , alors elle converge uniformément sur  $\overline{O}$  vers une fonction  $u$  harmonique sur  $O$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 1.1.3, on sait que  $(u_n)$  converge uniformément sur  $\overline{O}$ . Notons donc  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , et montrons que  $u$  est harmonique sur  $O$ . Soit  $A \in O$ , et  $R > 0$  tel que  $\overline{D}(A, R) \subset O$ . Comme on l'a déjà fait plusieurs fois, on déplace l'origine du repère en  $A$ , et on représente les  $(u_n)$  sous la forme d'une intégrale de Poisson :

$$\forall r < R \quad u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi$$

où les  $(f_n)$  sont les fonctions donnant les valeurs des  $(u_n)$  sur la frontière du disque. Puisque la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$  (c'est la traduction du fait que la suite  $(u_n)$  converge uniformément sur  $\text{Fr}(O)$ ), et que la suite  $(u_n)$  converge en tout point de  $\overline{D}(A, R)$  vers  $u$ , on peut passer à la limite dans l'égalité précédente et intervertir limite et intégrale :

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi$$

ce qui donne enfin :

$$\forall r < R \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi$$

où  $f$  désigne la limite uniforme des  $f_n$ , qui est continue. L'application  $u$  est donc harmonique en tout point de  $O$ .  $\square$

**Théorème 1.2.7. (Deuxième théorème de Harnack)**

Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions positives, harmoniques sur  $O$ . S'il existe  $A \in O$  tel que  $(u_n)$  converge en  $A$ , alors  $(u_n)$  converge uniformément sur tout compact de  $O$  vers une fonction harmonique sur  $O$ .

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, montrons un lemme de topologie très utile :

**Lemme 1.2.8.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^N$  un compact,  $U \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné tel que  $K \subset U$ . Alors on a

$$d(K, Fr(U)) = \inf_{x \in K, y \in Fr(U)} d(x, y) > 0.$$

En particulier, si un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^N$  est contenu dans une boule ouverte de rayon  $R$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $K$  soit contenu dans une boule de même centre et de rayon  $R + \varepsilon$ .

*Démonstration du lemme.* Soient  $(x_n), (y_n)$  deux suites de points de  $K, Fr(U)$  respectivement, telles que

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(K, Fr(U)).$$

Puisque  $K$  est compact, on extrait une sous-suite  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  qui converge vers  $x \in K$ . Puisque  $Fr(U)$  est un fermé borné, donc un compact de  $\mathbb{R}^N$ , on extrait une sous-suite  $(y_{n_{k_p}})$  de  $(y_{n_k})$  qui converge vers  $y \in Fr(U)$ . D'où  $d(K, Fr(U)) = d(x, y)$ . Or  $x \in K \subset U$ , donc il existe  $r > 0$  tel que  $D(x, r) \subset U$ . Ceci montre que  $d(K, Fr(U)) = d(x, y) > r > 0$ , d'où le lemme.  $\square$

*Démonstration du théorème.* On va procéder par étapes. Soit un tel point  $A$ .

**Première étape :** on montre d'abord que  $(u_n)$  converge uniformément sur tout disque  $D(A, R)$  tel que  $\overline{D}(A, R) \subset O$ . Soit un tel disque, et puisque  $O$  est ouvert, soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\overline{D}(A, R + \varepsilon) \subset O$ . On représente à nouveau  $(u_n)$  par une intégrale de Poisson, en ayant au préalable déplacé l'origine en  $A$  :

$$\forall r < R + \varepsilon \quad u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(R + \varepsilon, \psi) \frac{(R + \varepsilon)^2 - r^2}{(R + \varepsilon)^2 - 2r(R + \varepsilon) \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi.$$

Notons  $h(r, \theta, \psi) = \frac{(R + \varepsilon)^2 - r^2}{(R + \varepsilon)^2 - 2r(R + \varepsilon) \cos(\theta - \psi) + r^2}$ . Puisque  $|\cos(\theta - \psi)| \leq 1$ , on a les inégalités :

$$\frac{(R + \varepsilon)^2 - r^2}{(R + \varepsilon)^2 + r^2 + 2r(R + \varepsilon)} \leq h(r, \theta, \psi) \leq \frac{(R + \varepsilon)^2 - r^2}{(R + \varepsilon)^2 + r^2 - 2r(R + \varepsilon)}$$

soit, en factorisant :

$$\frac{(R + \varepsilon - r)(R + \varepsilon + r)}{(R + \varepsilon + r)^2} \leq h(r, \theta, \psi) \leq \frac{(R + \varepsilon - r)(R + \varepsilon + r)}{(R + \varepsilon - r)^2}$$

et enfin :

$$\frac{(R + \varepsilon - r)}{(R + \varepsilon + r)} \leq h(r, \theta, \psi) \leq \frac{(R + \varepsilon + r)}{(R + \varepsilon - r)}.$$

Puisque les  $u_n$  sont positives, on peut multiplier ces inégalités par  $u_n(R + \varepsilon, \psi)$  sans en changer le sens, ce qui donne :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(R + \varepsilon - r)}{(R + \varepsilon + r)} u_n(R + \varepsilon, \psi) \leq \frac{1}{2\pi} h(r, \theta, \psi) u_n(R + \varepsilon, \psi) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{(R + \varepsilon + r)}{(R + \varepsilon - r)} u_n(R + \varepsilon, \psi),$$

d'où, par intégration :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(R + \varepsilon - r)}{(R + \varepsilon + r)} \int_0^{2\pi} u_n(R + \varepsilon, \psi) d\psi \leq u_n(r, \theta) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{(R + \varepsilon + r)}{(R + \varepsilon - r)} \int_0^{2\pi} u_n(R + \varepsilon, \psi) d\psi,$$

et finalement, grâce au théorème de la moyenne arithmétique :

$$\frac{(R + \varepsilon - r)}{(R + \varepsilon + r)} u_n(A) \leq u_n(r, \theta) \leq \frac{(R + \varepsilon + r)}{(R + \varepsilon - r)} u_n(A).$$

Alors, si  $(u_n)$  converge en  $A$ ,  $(u_n)$  converge sur tout le disque fermé  $\overline{D}(A, R)$  (car l'inégalité est valable pour tout  $r < R + \varepsilon$ ), et la convergence est uniforme sur le cercle (car les membres de gauche et de droite de l'inégalité ne dépendent pas de  $\psi$ ). Donc par le premier théorème de Harnack,  $(u_n)$  converge uniformément sur le disque fermé  $\overline{D}(A, R)$  vers une fonction harmonique sur  $D(A, R)$ .

**Deuxième étape :** On montre que  $(u_n)$  converge en tout point de  $O$  : soit  $B \in O$ .

$O$  étant connexe, on peut relier  $A$  à  $B$  par un chemin  $\gamma \subset O$  continu. Par le lemme 1.2.5, on a  $d(\gamma, Fr(O)) = \delta > 0$ . Soit  $R > 0$  tel que  $\overline{D}(A, R) \subset O$ . Soit  $A_2 \in \gamma \cap Fr(D(A, R))$ . On a, par définition de  $\delta$ ,  $D(A_2, \delta/2) \subset O$  et ce qui a été fait à l'étape 1 montre que  $(u_n(A_2))$  converge, donc  $(u_n)$  converge uniformément sur  $\overline{D}(A_2, \delta/2) \subset O$ .

Soit  $A_3 \in \gamma \cap Fr(D(A_2, \delta/2))$ , on a  $D(A_3, \delta/2) \subset O$ , et par ce qui précède  $(u_n(A_3))$  converge donc  $(u_n)$  converge uniformément sur  $\overline{D}(A_3, \delta/2) \subset O$ .

On peut construire un nombre fini de tels points  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , de sorte que  $B \in \overline{D}(A_N, \delta/2)$  et que  $\gamma \subset \bigcup_{k=1}^N D(A_k, \delta/2)$ . Alors  $(u_n(B))$  converge, et puisque  $(u_n)$  converge uniformément sur  $D(A_N, \delta/2)$ , la limite des  $(u_n)$  est harmonique au voisinage de  $B$ .

**Troisième étape :** On va montrer que  $(u_n)$  converge uniformément sur les compacts de  $O$ . Soit  $K \subset O$  un compact, par la propriété de Borel-Lebesgue on peut le recouvrir par un nombre fini de disques  $D_1, \dots, D_p$  tels que  $\overline{D}_1 \subset U, \dots, \overline{D}_p \subset U$ . Par ce qui a été fait précédemment,  $(u_n)$  converge en tous les centres des  $D_k$ . Donc,  $(u_n)$  converge uniformément sur tous les  $D_k$  :  $(u_n)$  converge uniformément sur  $K$ .  $\square$

La convergence des suites de fonctions harmoniques est donc très régulière. Mais si le comportement des fonctions harmoniques est très régulier, il n'en est pas moins surprenant, comme le montre le résultat suivant :

**Théorème 1.2.9. (Théorème de Liouville)**

Soit une application  $u$ , harmonique sur  $\mathbb{R}^2$ , qui est bornée. Alors  $u$  est constante.

*Démonstration.* Puisque  $u$  est bornée, quitte à ajouter une constante à  $u$ , on peut supposer que  $u$  est positive. Montrons que pour tout point  $M$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u(M) = u(O)$ , où  $O$  est l'origine du plan.

On passe en coordonnées polaires : soient  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires de  $M$ , et soit  $r > 0$  tel que  $M \in D(0, r)$ . On représente  $u$  sous la forme d'une intégrale de Poisson, et comme dans la démonstration du deuxième théorème d'Harnack, on montre que :

$$\forall R > r, \quad \frac{R-r}{R+r}u(O) \leq u(M) \leq \frac{R+r}{R-r}u(O)$$

D'où en faisant tendre  $R$  vers l'infini (ce qui est possible car  $u$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2$ ), on obtient  $u(O) \leq u(M) \leq u(O)$ , et donc  $u(M) = u(O)$  pour tout  $M$ .  $\square$

Pour finir ce paragraphe, énonçons et démontrons le célèbre théorème de la singularité apparente :

**Théorème 1.2.10. (Théorème de la singularité apparente)**

Soit  $A$  un point du plan. On suppose que  $u$  est une application harmonique et bornée sur un voisinage épointé  $W$  de  $A$ , c'est-à-dire qu'il existe  $V$ , un voisinage de  $A$ , tel que  $W = V \setminus \{A\}$ . Alors  $u$  se prolonge par continuité en  $A$  en une application harmonique sur  $V$  tout entier.

*Démonstration.* On déplace l'origine au point  $A$ . Soit  $R > 0$  tel que  $D(A, R) \subset V$ . Soit  $u_1$  une application harmonique sur  $D(A, R)$  et égale à  $u$  sur la frontière de  $D(A, R)$  (cela existe car on a prouvé l'existence d'une solution au problème de Dirichlet pour un cercle), et notons  $v = u - u_1$ . Nous allons montrer que  $v$  est identiquement nulle sur  $D(A, R) \setminus \{A\}$ , après quoi on prolongera  $v$  par continuité en posant  $v(A) = 0$ , ce qui prouvera le théorème.

On sait déjà que  $v$  est nulle sur  $C(A, R)$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, R[$ , on considère l'application  $\omega_\varepsilon$  définie par :

$$\forall P \in D(A, R) \setminus \{A\}, \quad \omega_\varepsilon(P) = M \frac{\ln(AP/R)}{\ln(\varepsilon/R)}$$

où on a posé  $M = \sup_{D(A, R) \setminus \{A\}} |v|$ , fini par hypothèse.

Cette application a les propriétés suivantes :

1.  $\omega_\varepsilon$  induit une application harmonique sur  $D(A, R) \setminus \{A\}$  : en effet, on peut écrire :

$$\forall P \in D(A, R) \setminus \{A\}, \text{ si } r = AP, \quad \omega_\varepsilon(P) = M \frac{\ln(r/R)}{\ln(\varepsilon/R)},$$

et le membre de droite est une application  $f$  vérifiant  $f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta} = 0$ ;

2.  $\omega_\varepsilon$  est nulle sur  $C(A, R)$ ;
3.  $\omega_\varepsilon$  vaut  $M$  sur  $C(A, \varepsilon)$ .

Soit maintenant  $P$  dans la couronne  $D(A, R) \setminus D(A, \varepsilon)$ . L'application  $v - \omega_\varepsilon$  est harmonique sur cette couronne, donc atteint son maximum sur sa frontière. Et on a :

1.  $v - \omega_\varepsilon$  est nulle sur  $C(A, R)$  ;
2.  $\forall P \in C(A, \varepsilon), (v - \omega_\varepsilon)(P) \leq \sup_W v - M \leq \sup_W |v| - M = 0$ .

$v - \omega_\varepsilon$  est alors négative ou nulle ; de même,  $-v - \omega_\varepsilon$  est négative ou nulle. D'où :

$$\forall P \in D(A, R) \setminus D(A, \varepsilon), |v(P)| \leq M \frac{\ln(r/R)}{\ln(\varepsilon/R)}.$$

Le membre de gauche de cette inégalité est indépendant de  $\varepsilon$  : en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 par valeurs supérieures, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall P \in D(A, R) \setminus D(A, \varepsilon), v(P) = 0.$$

Ce qui signifie que pour tout point  $P$  de  $W$ , on a  $v(P) = 0$ , ce qu'on voulait montrer.  $\square$



### 1.3 Existence d'une solution au problème de Dirichlet

L'idée de la preuve ci-dessous a été donnée par Poincaré.

Nous avons d'abord besoin de quelques définitions : soit  $v$  une application continue sur un ouvert connexe borné non vide  $O \subset \mathbb{R}^2$ . On notera  $D$  un disque ouvert inclus dans  $O$ , et  $(v)_D$  une application continue égale à  $v$  sur  $O \setminus D$  et harmonique sur  $D$ .

On a clairement :

$$v \text{ harmonique sur } O \Leftrightarrow (v)_D \equiv v \quad \forall D \subset O.$$

Remarquons enfin que  $(v)_D$  existe est unique, puisqu'on a montré l'existence d'une solution au problème de Dirichlet pour un disque, et l'unicité de la solution au problème de Dirichlet dans le cas général (nous utiliserons cette unicité plusieurs fois).

Cette nouvelle notion nous permet de définir quelques concepts utiles :

#### Définition 1.3.1. (Applications sub et superharmoniques)

1.  $v$  est dite *superharmonique* sur  $O$  si pour tout disque ouvert  $D \subset O$ ,  $(v)_D \leq v$  ;
2.  $v$  est dite *subharmonique* sur  $O$  si pour tout disque ouvert  $D \subset O$ ,  $(v)_D \geq v$  ;
3. Si  $f$  est une fonction continue sur  $Fr(O)$ , si  $v$  est superharmonique (respectivement subharmonique) sur  $O$ , et si  $v \geq f$  (respectivement  $v \leq f$ ) sur  $Fr(O)$ , alors  $v$  est dite *fonction supérieure* (respectivement *inférieure*) pour  $f$ .

Montrons quelques propriétés de ce type de fonctions, qui seront nécessaires pour la démonstration. Dans toute la suite  $O$  désignera un ouvert connexe borné non vide.

#### Proposition 1.3.2. (Sur les fonctions sub et superharmoniques)

1. Toute application harmonique est superharmonique et subharmonique.
2. Si  $v$  est superharmonique et  $u$  est harmonique, alors  $v + u$  et  $v - u$  sont superharmoniques.
3. La somme d'un nombre fini d'applications superharmoniques est superharmonique.
4. Si  $v$  est superharmonique et  $w$  est subharmonique, alors  $v - w$  est superharmonique.

*Démonstration.* 1. Ce point est clair puisque :  $v$  harmonique sur  $O \Leftrightarrow (v)_D \equiv v \quad \forall D$ .

2. Soit  $D$  un disque ouvert. Si  $v_1$  et  $v_2$  sont deux applications continues sur  $O$ , on a par unicité de la solution au problème de Dirichlet  $(v_1 + v_2)_D = (v_1)_D + (v_2)_D$  et de même  $(-v_1)_D = -(v_1)_D$ . Donc, si  $v$  est superharmonique et  $u$  est harmonique, on a  $(v + u)_D = (v)_D + (u)_D \leq v + u$  et  $(v - u)_D = (v)_D - (u)_D \leq v - u$ . Ce qui montre que  $v + u$  et  $v - u$  sont superharmoniques.

3. C'est une conséquence du fait que  $(v_1 + v_2 + \dots + v_N)_D = (v_1)_D + (v_2)_D + \dots + (v_N)_D$  (toujours par unicité de la solution au problème de Dirichlet) : si  $v_1, \dots, v_N$  sont  $N$  applications superharmoniques, on peut écrire :

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_N)_D = (v_1)_D + (v_2)_D + \dots + (v_N)_D \leq v_1 + v_2 + \dots + v_N.$$

Ce qui montre la superharmonicité de  $(v_1 + v_2 + \dots + v_N)_D$ .

4. Si  $w$  est subharmonique, alors  $(w)_D \geq w \Rightarrow (-w)_D \leq -w$  :  $-w$  est superharmonique. Et on sait que la somme de deux applications superharmoniques est superharmonique, ce qui montre le résultat annoncé.  $\square$

**Proposition 1.3.3.** *Toute application  $v$ , superharmonique sur  $O$ , atteint son minimum (sur  $\overline{O}$ ) en un point de  $\text{Fr}(O)$ .*

*Démonstration.* Soit  $v$  une application superharmonique. Remarquons que  $v$  atteint son minimum  $m$  sur  $\overline{O}$  car c'est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ , donc un compact de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $P \in \overline{O}$  tel que  $v(P)$  soit minimal.

1. Si  $P \in \text{Fr}(O)$ , il n'y a rien à montrer.
2. Si  $P \in O$ , montrons que, pour tout disque ouvert  $D \subset O$  de centre  $P$ , on a :

$$v(M) = m \quad \forall M \in \text{Fr}(D).$$

Supposons que cette affirmation soit fautive, donc qu'il existe un disque ouvert  $D \subset O$  de centre  $P$  et un point  $N \in \text{Fr}(D)$  tel que  $v(N) = \alpha > m$ . Alors, puisque  $v$  est superharmonique, on a :

$$(v)_D(P) \leq v(P) = m \quad \text{et} \quad \forall M \in \text{Fr}(D) \quad (v)_D(M) = v(M) \geq m.$$

Donc  $(v)_D$ , qui est harmonique, atteint son minimum (sur  $\overline{D}$ ) en un point de  $D$  :  $(v)_D$  est donc constante sur  $\overline{D}$ . Pourtant  $(v)_D(N) = v(N) = \alpha > m$ . On a une contradiction : l'hypothèse de départ était donc absurde.

Notons à présent

$$r = d(P, \text{Fr}(D)) = \inf_{M \in \text{Fr}(D)} d(P, M)$$

et  $D_0$  le disque ouvert de centre  $P$  et de rayon  $r$ . Alors  $\text{Fr}(D_0) \cap \text{Fr}(O) \neq \emptyset$ , donc il existe  $Q \in \text{Fr}(D_0) \cap \text{Fr}(O)$ . Et on a  $v(Q) = m$ , donc  $v$  atteint son minimum en  $Q \in \text{Fr}(O)$ .

D'où le théorème dans tous les cas. □

**Proposition 1.3.4.** *Soit  $f$  une fonction continue sur  $\text{Fr}(O)$ . Pour toute fonction supérieure  $v$  pour  $f$  et toute fonction inférieure  $w$  pour  $f$ , on a l'inégalité  $v \geq w$ .*

*Démonstration.* Par le point 4. de la proposition 1.3.2,  $v - w$  est superharmonique, et par la proposition 1.3.3,  $v - w$  atteint son minimum en un point  $P \in \text{Fr}(O)$ . Et on a  $v(P) \geq f(P)$ ,  $w(P) \leq f(P)$ , donc  $(v - w)(P) \geq 0$ . Ainsi  $v \geq w$ . □

**Proposition 1.3.5.** *Si  $f$  est une fonction continue sur  $\text{Fr}(O)$ , et  $v_1, \dots, v_N$  sont  $N$  fonctions supérieures pour  $f$ , alors  $v = \min\{v_1, \dots, v_N\}$  est aussi une fonction supérieure pour  $f$ .*

*Démonstration.*  $v$  est continue sur  $\overline{O}$  et on a  $v \geq f$  car  $v_i \geq f$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Il reste à montrer que  $v$  est superharmonique.

Soit donc  $D \subset O$  un disque ouvert. Soit  $P \in D$ , il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$  tel que  $v(P) = v_i(P)$ , et on a  $v(P) = v_i(P) \geq (v_i)_D(P)$  car les  $v_i$  sont, en particulier, superharmoniques. Le lemme suivant va permettre de conclure :

**Lemme 1.3.6.** *Soient deux applications  $f$  et  $g$  continues sur  $O$  telles que  $f \leq g$ . Alors, pour tout disque ouvert  $D \subset O$ , on a  $(f)_D \leq (g)_D$ .*

*Démonstration du lemme.* Par hypothèse  $f - g$  est négative sur  $O$ , donc la fonction harmonique  $(f - g)_D$ , qui est égale à  $f - g$  sur  $O \setminus D$  et donc en particulier sur  $\text{Fr}(D)$ , a, par le principe du maximum, un maximum négatif sur  $D$ . Donc sur  $D$ ,  $(f - g)_D \leq 0$ . Par unicité de la solution au problème de Dirichlet, on a  $(f)_D - (g)_D \leq 0$  sur  $D$  :  $(f)_D \leq (g)_D$  sur  $D$ . Puisque sur  $O \setminus D$ ,  $(f - g)_D = f - g \leq 0$ , on a  $(f)_D \leq (g)_D$ . □

On revient à la démonstration du théorème : puisque  $v_i \geq v$ , on a  $v(P) = v_i(P) \geq (v_i)_D(P) \geq (v)_D(P)$ . Donc  $(v)_D \leq v$  pour tout disque ouvert  $D \subset O$ . Finalement  $v$  est superharmonique sur  $O$  : c'est une fonction supérieure pour  $f$ .  $\square$

**Proposition 1.3.7.** *Si  $f$  est une fonction continue sur  $\text{Fr}(O)$ , et si  $v$  est une fonction supérieure pour  $f$ , alors pour tout disque ouvert  $D \subset O$ ,  $(v)_D$  est aussi une fonction supérieure pour  $f$ .*

*Démonstration.* Soit  $D \subset O$  un disque ouvert. Puisque  $(v)_D$  coïncide avec  $v$  sur  $O \setminus D$ , il est clair que  $(v)_D = v \geq f$  sur  $\text{Fr}(O)$ .

Il reste à prouver que pour tout disque ouvert  $D_1 \subset O$ ,  $((v)_D)_{D_1} \leq (v)_D$ , et il suffit de prouver cette inégalité (I) sur  $D_1$ .

1. Si  $D_1 \subset D$ , c'est clair car  $(v)_D$ , harmonique sur  $D$ , est superharmonique sur  $D_1 \subset D$ .
2. Si  $D_1 \subset O \setminus D$ , on a, pour  $P \in D_1$ ,  $((v)_D)_{D_1}(P) = (v)_{D_1}(P)$  (car  $(v)_D = v$  sur  $O \setminus D$ ), et par superharmonicité, on a  $(v)_{D_1}(P) \leq v(P) = (v)_D(P)$ , d'où  $((v)_D)_{D_1}(P) \leq (v)_D(P)$ .
3. Sinon, sur  $\text{Fr}(D_1)$ , on a  $(v)_D \leq v$  car  $v$  est superharmonique. Donc sur  $D_1$ , on a  $((v)_D)_{D_1} \leq (v)_{D_1} \leq v$ , la dernière inégalité résultant du fait que  $v$  est superharmonique. Puisque  $(v)_D$  et  $v$  coïncident sur  $O \setminus D$ , on a l'inégalité (I) sur  $O \setminus D$ . (I) est ainsi vraie sur  $\text{Fr}(D)$  et  $\text{Fr}(D_1)$  : (I) est vraie sur  $\text{Fr}(D) \cap \text{Fr}(D_1)$ . Or, on a le résultat suivant :

**Lemme 1.3.8.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique, et  $A, B$  deux parties de  $X$ . Alors on a :  $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$ .*

*Démonstration du lemme.* Il suffit de montrer que, puisque  $\text{Fr}(Y) = \overline{Y} \setminus \overset{\circ}{Y}$  :

1.  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ ;
2.  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$ .

1. Cette inclusion découle du fait que  $\overline{A \cap B}$  est un fermé contenant  $A \cap B$ , et par définition,  $\overline{A \cap B}$  est le plus petit fermé contenant  $A \cap B$ .

2. L'inclusion voulue est claire car  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  est un ouvert contenu dans  $A \cap B$ , et  $\overset{\circ}{A \cap B}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A \cap B$ .  $\square$

On revient à notre théorème : (I) est donc vraie sur  $\text{Fr}(D \cap D_1)$ ; comme  $(v)_D$  et  $((v)_D)_{D_1}$  sont harmoniques sur  $D \cap D_1$ , (I) est vraie sur  $D \cap D_1$  par le principe du maximum.

D'où l'inégalité dans tous les cas.  $\square$

On dispose maintenant de tous les outils pour démontrer l'existence de la solution au problème de Dirichlet. Soit  $O$  un ouvert connexe borné non vide de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  une fonction continue sur  $\text{Fr}(O)$ . On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } O \\ u = f & \text{sur } \text{Fr}(O). \end{cases}$$

La famille  $\mathcal{F}$  des fonctions supérieures pour  $f$  est non vide, car  $c = \sup_O f$  est une telle application. Définissons une application  $u$  par :  $\forall M \in O, u(M) = \inf_{w \in \mathcal{F}} w(M)$ .

**Théorème 1.3.9.**  *$u$  est harmonique sur  $O$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout disque ouvert  $D \subset O$ ,  $u$  est harmonique sur  $D$ . Soit donc un tel disque ouvert  $D$ , et soit  $\Omega$  son centre. Soit  $\varepsilon > 0$ .

Par définition de  $u$ , il existe une fonction supérieure  $v_1$  telle que  $v_1(\Omega) < u(\Omega) + \varepsilon$ . Quitte à remplacer  $v_1$  par  $(v_1)_D$ , qui est aussi une fonction supérieure (proposition 1.3.7), et telle que  $(v_1)_D(\Omega) \leq v_1(\Omega) < u(\Omega) + \varepsilon$  (la première inégalité vient du fait que  $v_1$  est supérieure), on peut supposer que  $v_1$  est harmonique.

Il existe une fonction supérieure  $\varphi_2$  telle que  $\varphi_2(\Omega) < u(\Omega) + \varepsilon/2$ . Alors  $\psi_2 = \min(v_1, \varphi_2)$  est une application supérieure (proposition 1.3.5) qui est inférieure à  $v_1$ . Et finalement  $v_2 = (\psi_2)_D$  est harmonique, supérieure pour  $f$ , inférieure à  $v_1$  en tout point, et vérifie  $v_2(\Omega) < u(\Omega) + \varepsilon/2$ .

On construit ainsi une suite  $(v_k)$  de fonctions harmoniques sur  $D$ , décroissante, minorée par le minimum de  $f$  sur  $\overline{O}$ , donc convergente, et vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_k(\Omega) < u(\Omega) + \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}.$$

Par le deuxième théorème de Harnack,  $(v_k)$  converge uniformément sur  $\overline{D}$  vers une fonction harmonique  $v$ . Montrons que  $\forall M \in D, u(M) = v(M)$ .

Supposons que ce soit faux. Alors, puisque  $u = \inf_{w \in \mathcal{F}} w$ , et que  $v$  est harmonique, donc superharmonique et supérieure pour  $f$  (car  $v_k \geq f$  donc à la limite  $v \geq f$ ), il existe une fonction supérieure  $w$  et un point  $P \in D$  tel que  $w(P) < v(P)$ . Notons  $D'$  le disque ouvert de centre  $\Omega$  et de rayon  $\Omega P$ , de sorte que  $P \in \text{Fr}(D')$ . Alors chaque fonction  $w_k = (\min(w, v_k))_{D'}$  est une fonction supérieure (par la proposition 1.3.5). Et puisque  $(v_k)$  converge uniformément sur  $\overline{D}$ ,  $(v_k)$  converge en particulier uniformément sur  $\overline{D'}$ , donc  $(w_k)$  converge uniformément sur  $\overline{D'}$  vers une application harmonique sur  $D'$  (premier théorème de Harnack), qui est  $(\min(w, v))_{D'}$ .

Or :  $(\min(w, v))_{D'}(\Omega) < v(\Omega)$ . En effet,  $(\min(w, v))_{D'} - v$  est harmonique sur  $D'$ , donc sa valeur au centre du cercle est égale à la moyenne arithmétique de ses valeurs sur  $\text{Fr}(D')$ . Et puisque  $w(P) < v(P)$ , il existe un voisinage  $X$  de  $P$  où  $w(M) < v(M)$ , donc  $(\min(w, v))_{D'} - v$  est strictement négative sur  $X$  et négative sur  $\text{Fr}(D')$ . Par le théorème de la moyenne arithmétique, on a alors  $(\min(w, v))_{D'}(\Omega) - v(\Omega) < 0$ .

Et on a :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, u(\Omega) \leq v_k(\Omega) < u(\Omega) + \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$  : à la limite  $k \rightarrow \infty, v(\Omega) = u(\Omega)$ .

Finalement on a  $(\min(w, v))_{D'}(\Omega) < u(\Omega)$ , et par les propositions 1.3.5 et 1.3.7,  $(\min(w, v))_{D'}$  est une fonction supérieure pour  $f$ . Il y a contradiction avec la définition de  $u$ . L'hypothèse de départ était donc absurde : on a alors  $u(M) = v(M) \forall M \in D$ , ce qu'on voulait montrer. Puisque  $v$  est harmonique,  $u$  est harmonique également.  $\square$

Il reste à étudier le comportement de  $u$  sur  $\text{Fr}(O)$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 1.3.10. (“Barrière”)**

Soit  $Q \in \text{Fr}(O)$ , alors  $u(Q) = f(Q)$  si on a la condition suivante :  
il existe une fonction  $\omega_Q$ , superharmonique sur  $O$ , continue sur  $\overline{O}$ , telle que :

1.  $\omega_Q(Q) = 0$  ;
2.  $\forall P \in \overline{O}, P \neq Q \Rightarrow \omega_Q(P) > 0$ .

$\omega_Q$  est appelée barrière.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ , par continuité de  $f$ , il existe un voisinage de  $Q$  noté  $U_Q$ , tel que

$$\forall P \in U_Q \cap \text{Fr}(O), f(Q) - \varepsilon < f(P) < f(Q) + \varepsilon.$$

De plus, par continuité de  $\omega_Q$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\forall P \in \overline{O} \setminus U_Q, \omega_Q(P) \geq \alpha.$$

En effet  $\overline{O} \setminus U_Q$  est un compact, donc  $\omega_Q(P)$  admet un minimum sur cet ensemble, et il est atteint ; puisque  $\omega_Q$  ne prend que des valeurs strictement positives en-dehors de  $U_Q$ , ce minimum  $\alpha$  est aussi strictement positif.

Soient alors, pour  $C > 0$ , les fonctions  $\phi_C$  et  $\psi_C$  définies par :

$$\phi_C(P) = f(Q) - \varepsilon - C\omega_Q(P), \psi_C(P) = f(Q) + \varepsilon + C\omega_Q(P).$$

Alors : pour  $C$  suffisamment grand,  $\phi_C$  et  $\psi_C$  sont respectivement inférieures et supérieures pour  $f$ .

Montrons la deuxième affirmation :

$\forall C \in \mathbb{R}_+, \psi_C$  est superharmonique car  $\omega_Q$  l'est. Par définition de  $U_Q$ , et parce que  $\omega_Q$  est à valeurs positives, on a :

$$\forall P \in U_Q \cap \text{Fr}(O), \psi_C(P) = f(Q) + \varepsilon + C\omega_Q(P) \geq f(Q) + \varepsilon \geq f(P).$$

En un point  $P \in \text{Fr}(O) \setminus (U_Q \cap \text{Fr}(O))$ , on a  $\omega_Q(P) \geq \alpha > 0$ . En prenant

$$C \geq \frac{1}{\alpha} \left[ \sup_{M \in \text{Fr}(O)} f(M) - f(Q) - \varepsilon \right],$$

on a  $\psi_C(P) \geq f(P)$ . Ainsi, pour  $C$  assez grand (disons supérieur à  $C_0$ ),  $\psi_C$  est supérieure pour  $f$ , et la même idée montre que pour  $C$  supérieur à  $C_1$ ,  $\phi_C$  est inférieure pour  $f$ . Soit donc  $C \geq \max(C_0, C_1)$ , on a, par définition de  $u$  :

$$f(Q) - \varepsilon = \phi_C(Q) \leq u(Q) \leq \psi_C(Q) = f(Q) + \varepsilon.$$

En effet, la première inégalité vient du fait que  $u$  est la borne inférieure des fonctions supérieures  $w$  pour  $f$ , qui vérifient toutes l'inégalité  $\phi_C(Q) \leq w(Q)$ , par la proposition 1.3.4, donc  $u$  vérifie également cette inégalité. La deuxième inégalité est vraie car  $\psi_C$  est une fonction supérieure pour  $f$ .

Il ne reste qu'à faire tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$  pour obtenir  $u(Q) = f(Q)$ .  $\square$

Sous la condition d'existence de la barrière, on a donc existence et unicité de la solution au problème de Dirichlet. Il reste à savoir sous quelles conditions cette barrière existe. On a le résultat suivant :

**Théorème 1.3.11.** *Tout point  $Q$  d'un ouvert  $O$  borné simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$  vérifie la condition d'existence de la barrière.*

**Corollaire 1.3.12.** *Soit  $O$  un ouvert borné simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  une fonction continue sur  $Fr(O)$ . Il y a existence et unicité de la solution au problème*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } O \\ u = f & \text{sur } Fr(O). \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $O \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné simplement connexe, et  $Q \in Fr(O)$ . Notons  $d$  le diamètre de  $O$ . On déplace l'origine du repère en  $Q$ ; puisque  $O$  est simplement connexe, et que  $Q \in Fr(O)$ , il existe une demi-droite  $\mathcal{D}$  passant par  $O$  telle que  $\mathcal{D} \cap O = \emptyset$ . On fait ensuite une rotation du repère de sorte que  $\mathcal{D}$  devienne la partie négative de l'axe des abscisses (ce qui ne change rien à l'harmonicité des fonctions). On identifie alors  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$ , et on définit une fonction  $\log$  comme étant la détermination principale du logarithme (dans notre nouveau repère), c'est à dire l'unique fonction  $\varphi$  définie sur  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  et telle que  $\exp(\varphi(z)) = z$ , qui coïncide avec la fonction logarithme népérien sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Finalement, on définit deux fonctions  $p$  et  $q$  par :

$$\forall z \in U, z = x + iy, \quad \begin{cases} p(x, y) = \operatorname{Re} \left( \log \left( \frac{x + iy}{2d} \right) \right) \\ q(x, y) = \operatorname{Im} \left( \log \left( \frac{x + iy}{2d} \right) \right), \end{cases}$$

et une fonction  $\omega_Q$  par

$$\forall x, y \text{ tels que } z = x + iy \in U, \quad \omega_Q(x, y) = -\frac{p(x, y)}{p^2(x, y) + q^2(x, y)}.$$

Alors :  $\omega_Q$  est la barrière souhaitée.

En effet, calculons  $p$  et  $q$ . Soient  $r$  et  $s$  les deux fonctions définies par

$$\forall z \in U, z = x + iy, \quad \begin{cases} r(x, y) = \operatorname{Re}(\log(x + iy)) \\ s(x, y) = \operatorname{Im}(\log(x + iy)). \end{cases}$$

On a, par définition de la fonction  $\log$ ,

$$\forall x, y \text{ tels que } z = x + iy \in U, \quad \exp(\log(x + iy)) = \exp(r(x, y) + is(x, y)) = x + iy.$$

En prenant successivement le module et un argument de cette égalité, on obtient

$$r(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad s(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Et puisque  $\log$  coïncide avec  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a  $\log(1) = 0$ , soit

$$\log(1) = 0 = r(1, 0) + is(1, 0) = \ln(1) + i \arctan(0) + 2ik\pi \Rightarrow k = 0.$$

Finalement, on a :

$$\forall x, y \text{ tels que } z = x + iy \in U, \quad r(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad s(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

On a alors l'expression de  $\omega_Q$  :

$$\forall x, y \text{ tels que } z = x + iy \in U, \quad \omega_Q(x, y) = -\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2d}\right)}{\ln^2\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2d}\right) + \arctan^2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Il reste à vérifier que  $\omega_Q$  satisfait aux conditions prescrites en 1.3.10.

1. On a, en passant en coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,

$$|\omega_Q(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \left| \frac{\ln\left(\frac{r}{2d}\right)}{\ln^2\left(\frac{r}{2d}\right) + \arctan^2\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)} \right| \leq \left| \frac{\ln\left(\frac{r}{2d}\right)}{\ln^2\left(\frac{r}{2d}\right) + \frac{\pi^2}{4}} \right| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

donc on peut prolonger  $\omega_Q$  de manière continue en  $(0,0)$  (donc en  $Q$ , puisque c'est l'origine du repère) en posant  $\omega_Q(0,0) = 0$ .

2. Soit  $(x, y) \in \bar{O} \setminus \{Q\}$ . On a  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq d$  par définition de  $D$ , et ainsi  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2d$ . D'où :

$$(x, y) \in \bar{O} \setminus \{Q\} \Rightarrow 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2d \Rightarrow -\ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2d}\right) > 0 \Rightarrow \omega_Q(x, y) > 0.$$

3. Il reste à montrer que  $\omega_Q$  est superharmonique. Pour cela, il suffit de voir que  $\omega_Q$  est harmonique sur  $O$ . C'est un calcul très long, qui peut être un peu écourté en remarquant que les deux fonctions  $p$  et  $q$  sont harmoniques également, et qu'elles vérifient les relations

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

$\omega_Q$  est donc une barrière, d'où la proposition.  $\square$

Cependant, cette démonstration n'est valable que dans le cas où  $O$  est simplement connexe. Par exemple, si  $O$  est la région délimitée par deux cercles concentriques de rayon différent, et que  $Q$  est un point du cercle intérieur, alors le logarithme n'est plus une application (au sens où le logarithme peut prendre deux valeurs différentes au même point). On remplace donc la condition du théorème 1.3.10 par la condition plus générale suivante :

**Théorème 1.3.13. ("Barrière 2")**

Soit  $Q \in Fr(O)$ , alors  $u(Q) = f(Q)$  si on a la condition suivante :

pour tout voisinage  $V_Q$  de  $Q$ , il existe une fonction  $\Omega_Q$ , appelée barrière, superharmonique sur  $U_Q = \bar{O} \cap V_Q$ , ayant les propriétés suivantes :

1.  $\Omega_Q$  est continue sur  $\bar{U}_Q$  ;
2.  $\Omega_Q(Q) = 0$  ;
3.  $\forall P \in \bar{U}_Q, P \neq Q \Rightarrow \Omega_Q(P) > 0$ .

Ces trois propriétés en impliquent une quatrième :

4.  $\exists k > 0, \forall P \in Fr(U_Q) \cap O, \Omega_Q(P) \geq k$ .

*Démonstration.* On va montrer que si le point  $Q$  satisfait la condition du théorème 1.3.13, il satisfait également la condition du théorème 1.3.10. Soit  $V_Q$  un voisinage de  $Q$ , et avec les notations de l'énoncé, une fonction  $\Omega_Q$  possédant toutes les propriétés prescrites. Notons  $\omega_Q$  la fonction définie par :

$$\forall P \in O, \omega_Q(P) = \begin{cases} \min \left\{ \frac{2}{k} \Omega_Q(P), 1 \right\} & \text{si } P \in U_Q \\ 1 & \text{si } P \notin U_Q. \end{cases}$$

On va montrer que cette fonction possède toutes les propriétés demandées en 1.3.10.

1. La fonction  $\omega_Q$  est continue sur  $\overline{O}$  (car  $\Omega_Q$  l'est, et par la propriété 4. de l'énoncé) ;
2.  $\omega_Q(Q) = 0$  (car  $\Omega_Q(Q) = 0$ ) ;
3.  $\omega_Q > 0$  sur  $\overline{O} \setminus \{Q\}$  ;
4. il reste à montrer que  $\omega_Q$  est superharmonique sur  $O$ , donc que pour tout disque ouvert  $D \subset O$ ,  $(\omega_Q)_D \leq \omega_Q$ .

Au préalable, on note  $O_1$  l'ensemble des points où  $\omega_Q$  prend la valeur 1. Avec cette notation,  $\omega_Q$  est égale à 1 sur  $O_1$ , et à  $\frac{2}{k}\Omega_Q$  sur  $O \setminus O_1$ .

Soit  $D \subset O$  un disque ouvert.

1. Si  $D \subset O_1$ , le point 4. est clair, car une application harmonique sur un ouvert atteint son maximum sur la frontière de cet ouvert. Donc pour tout point  $M$  de  $D \subset O_1$ , on a  $(\omega_Q)_D(M) \leq 1 = \omega_Q(M)$ .
2. Si  $D \subset O \setminus O_1$ , puisque la fonction  $\Omega_Q$  est superharmonique sur  $U_Q$ , la fonction  $\min \left\{ \frac{2}{k} \Omega_Q, 1 \right\}$  est aussi superharmonique sur  $U_Q$  (voir la démonstration de la proposition 1.3.5), et par hypothèse  $D \subset O \setminus O_1 \subset U_Q$ . Le point 4. se déduit clairement de cette dernière remarque.

3. Sinon,  $D$  contient à la fois des points de  $O_1$  et de  $O \setminus O_1$ .

Sur  $D \cap O_1$ , la fonction  $\omega_Q$  est égale à 1, et la fonction  $(\omega_Q)_D$ , qui est harmonique sur  $D$ , atteint son maximum sur  $\text{Fr}(O)$ , qui est inférieur ou égal à 1. Donc le point 4. est vrai sur  $D \cap O_1$ .

$U = D \cap (O \setminus O_1)$  est un ouvert, car  $O_1$  est un fermé en tant qu'image réciproque du fermé  $\{1\}$  par l'application continue  $\omega_Q$ . Sur cet ouvert, la fonction  $\omega_Q$  est superharmonique et la fonction  $(\omega_Q)_D$  est harmonique, donc la différence  $\omega_Q - (\omega_Q)_D$  est superharmonique sur  $U$ . Par la proposition 1.3.3, on a l'inégalité suivante :

$$\forall P \in U, (\omega_Q - (\omega_Q)_D)(P) \geq \inf_{\text{Fr}(U)} (\omega_Q - (\omega_Q)_D).$$

Or on a  $\text{Fr}(U) \subset \text{Fr}(D) \cap \text{Fr}(O \setminus O_1) \subset \text{Fr}(D)$ , donc

$$\forall P \in U, (\omega_Q - (\omega_Q)_D)(P) \geq \inf_{\text{Fr}(D)} (\omega_Q - (\omega_Q)_D) = 0$$

par définition de  $(\omega_Q)_D$ . Donc l'inégalité est vraie sur  $U$ . □



Avant de conclure, donnons une définition :

**Définition 1.3.14.** On dit qu'un chemin fermé  $\Gamma$  *entoure* un point  $Q \in \mathbb{R}^2$  si le point  $Q$  appartient à la composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

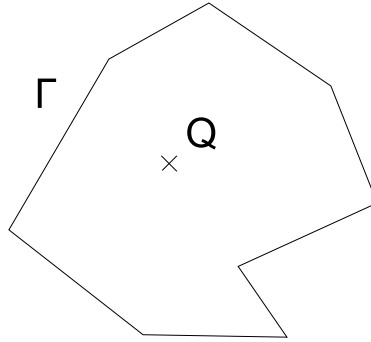


FIG. 1.1 – Exemple

Dans le cas  $n = 2$ , on a le résultat suivant :

**Proposition 1.3.15.** Soit  $O$  un ouvert connexe borné et  $Q \in Fr(O)$ . Avec les notations précédentes, s'il existe un voisinage  $U_Q$  de  $Q$  tel qu'il n'existe aucun chemin fermé  $\Gamma \subset U_Q \cap O$  entourant  $Q$ , alors  $Q$  vérifie la condition du théorème 1.3.13.

*Démonstration.* On déplace l'origine au point  $Q$  et on prend un voisinage  $W_Q \subset U_Q$  (toujours pour la topologie induite sur  $\overline{O}$ ) tel que la distance de tout point  $M \in W_Q$  à  $Q$  soit inférieure à un réel  $c$ , où  $c < 1$ . On choisit alors une détermination du logarithme sur  $U_Q$ , qu'on note  $\log$ . On désigne par  $p$  et  $q$  les parties réelle et imaginaire de  $\log$ , et on définit

$$\Omega_Q = -\frac{p}{p^2 + q^2}.$$

Alors  $\Omega_Q$  possède toutes les propriétés demandées en 1.3.13 (ceci se prouve comme en 1.3.11).  $\square$

Ayant montré cette proposition, on constate qu'on a maintenant l'existence de la solution au problème de Dirichlet pour une classe plus large d'ouverts connexes bornés (notamment pour notre contre-exemple précédent, avec deux cercles concentriques).

Néanmoins, il est intéressant de voir qu'il n'y a pas existence de la solution au problème de Dirichlet pour tout ouvert connexe borné. A cet effet, considérons l'exemple suivant :

**Proposition 1.3.16.** Soit  $U$  un disque ouvert  $D$  privé de son centre. Il n'existe aucune fonction  $u$  continue sur  $\overline{U}$  et harmonique sur  $U$  qui soit nulle sur  $Fr(U)$  et qui prenne la valeur 1 au centre du disque  $D$ .

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une telle fonction  $u$ . Alors par le théorème de la singularité apparente,  $u$  se prolonge en une application  $\tilde{u}$  qui est harmonique sur  $D$ . Puisque  $\tilde{u}$  est harmonique sur  $D$  et nulle sur  $Fr(D)$ , par le théorème du minimum et du maximum,  $\tilde{u}$  est identiquement nulle sur  $D$ . Et par hypothèse  $\tilde{u}$  vaut 1 au centre du disque, ce qui est absurde.  $\square$

On a donc montré qu'il existait des problèmes de Dirichlet n'ayant pas de solution sur un ouvert connexe borné.

# Chapitre 2

## Distribution des valeurs propres du laplacien

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'équation

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

sur un ouvert connexe borné  $O$  ayant une frontière de classe  $\mathcal{C}^1$  (on dira, pour abrégé, que  $O$  est un ouvert  $\mathcal{C}^1$ ) pour certains types de conditions aux limites. On montrera en particulier que cette équation n'admet de solution non triviale que pour un ensemble dénombrable de valeurs de  $\lambda$ ; en notant  $(\lambda_n)$  la suite de ces valeurs ordonnées dans l'ordre croissant, on calculera un équivalent de  $\lambda_n$ .

Pour des informations supplémentaires, se référer à [2] et [3].

### 2.1 Motivation

On étudie dans ce paragraphe des fonctions dépendant des deux coordonnées spatiales  $x, y$  et du temps  $t$ . Dans ce contexte, le laplacien d'une fonction  $u$  est toujours

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

Considérons l'équation

$$\Delta u = u_{tt} \quad (E)$$

à résoudre sur un ouvert connexe borné  $O$ , avec, par exemple, la condition aux limites  $u = 0$  sur  $\text{Fr}(O)$ . On cherche une solution sous la forme  $u(x, y, t) = v(x, y)g(t)$ . On obtient immédiatement, en remplaçant dans  $(E)$ , l'équation :

$$g\Delta v = g''v \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\Delta v}{v}}_{\text{indépendant de } t} = \underbrace{\frac{g''}{g}}_{\text{indépendant de } x,y} = -\lambda \in \mathbb{R}$$

d'où on déduit l'équation

$$\Delta v + \lambda v = 0. \quad (E_\lambda)$$

Il s'agit donc de déterminer le paramètre  $\lambda$  de sorte qu'il existe une fonction  $v$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $O$  qui ne soit pas identiquement nulle, qui vérifie l'équation  $(E_\lambda)$  et qui soit nulle sur  $\text{Fr}(O)$  : si  $\lambda_0$  est une telle valeur, et si  $u_0$  est une solution de l'équation  $(E_{\lambda_0})$ , alors on dit que  $\lambda_0$  est une valeur propre et  $u_0$  est une fonction propre pour l'équation  $(E_\lambda)$ . C'est pourquoi ce problème est appelé *problème aux valeurs propres*. Dans notre étude, nous nous placerons, pour simplifier, dans le cas d'un rectangle  $[0, a] \times [0, b]$  pour l'étude asymptotique (après quoi on généralisera, dans le cas à deux variables), le cas d'un rectangle quelconque s'en déduisant par translation. Rappelons d'abord quelques éléments d'analyse dont nous nous servirons pour résoudre ce problème.

## 2.2 Éléments théoriques

### 2.2.1 Formule de Gauss-Ostrogradski, formule de Green

On rappelle ici la *formule de Gauss-Ostrogradski* :

**Théorème 2.2.1. (Formule de Gauss-Ostrogradski)**

Soit  $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$ . Si la frontière  $\Gamma$  de  $U$  est une courbe continue de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, on a :

$$\iint_U \text{div}(\vec{f}) \, dx \, dy = \int_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{n} \, ds.$$

La démonstration de ce théorème est longue : elle est donnée en annexe.

On va déduire de ce résultat une autre formule : la *formule de Green*.

Soit un domaine  $G$  ayant une frontière  $\Gamma$  représentable par une fonction continue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Soit  $v$  une fonction continue de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\overline{G}$ , et  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  par morceaux sur  $\overline{G}$ . On a :

$$\iint_G p(u_x v_x + u_y v_y) + quv + v[(pu_x)_x + (pu_y)_y - qu] \, dx \, dy = \iint_G (pvu_x)_x + (pvu_y)_y \, dx \, dy.$$

Et donc, par la formule de Gauss-Ostrogradski, en notant  $Q[u, v] = p(u_x v_x + u_y v_y) + quv$  et  $L[u] = (pu_x)_x + (pu_y)_y - qu$  :

$$\iint_G Q[u, v] + vL[u] \, dx \, dy = \int_\Gamma pv[u_x n_1 + u_y n_2] \, ds$$

si  $\vec{n}$  a pour composantes  $(n_1, n_2)$ . Et, pour tout vecteur  $\vec{m} = (m_1, m_2)$ , on a

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{m}} = u_x m_1 + u_y m_2,$$

d'où la *formule de Green* :

$$\iint_G Q[u, v] \, dx \, dy = \iint_G -vL[u] \, dx \, dy + \int_\Gamma pv \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Dans le cas  $p = 1, q = 0$ , ceci donne :

$$\iint_G (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy = - \iint_G v \Delta u \, dx \, dy + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

## 2.2.2 Rappels sur les séries de Fourier

On rappelle ici quelques résultats sur les séries de Fourier :

### Théorème 2.2.2. (Théorème de Dirichlet)

Soit  $T > 0$  et  $f$  une application continue par morceaux  $T$ -périodique. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors  $f$  est somme de sa série de Fourier en tout point.

**Corollaire 2.2.3.** Soit  $a > 0$  et  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Si  $f$  vérifie une des deux conditions

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^a f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt = 0$$

ou

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^a f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt = 0$$

alors  $f$  est identiquement nulle sur  $[0, a]$ .

*Idée de la démonstration.* Si  $f$  vérifie la première condition, on construit l'unique application  $g$  qui soit  $2a$ -périodique, impaire, et qui coïncide avec  $f$  sur  $[0, a]$ . Alors  $g$  vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet, donc est somme de sa série de Fourier, qui est nulle, car tous ses coefficients sont nuls, puisque  $f$  vérifie la première condition.

Si  $f$  vérifie la deuxième condition, on construit l'unique application  $h$  qui soit  $2a$ -périodique, paire, et qui coïncide avec  $f$  sur  $[0, a]$ , et on fait le même raisonnement.  $\square$

## 2.3 Premiers résultats

Dans les sections 2.3 et 2.4,  $O$  désignera un ouvert connexe borné  $\mathcal{C}^1$  de frontière  $\Gamma$ . Considérons le problème aux valeurs propres de l'équation

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{2.1}$$

sur  $O$ , avec la condition aux limites  $u = 0$  ou la condition  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$  où  $\sigma$  est une fonction continue sur  $\Gamma$ , toujours positive sauf mention contraire.

Dans toute la suite, on notera

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[\varphi] &= D[\varphi] + \int_{\Gamma} \sigma \varphi^2 ds, \\ \text{où } D[\varphi] &= \iint_O (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy, \\ \text{et } H[\varphi] &= \iint_O \varphi^2 dx dy. \end{aligned}$$

Ces trois expressions sont des fonctionnelles quadratiques, de fonctionnelles polaires associées

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[\varphi, \psi] &= D[\varphi, \psi] + \int_{\Gamma} \sigma \varphi \psi ds, \\ \text{avec } D[\varphi, \psi] &= \iint_O (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y) dx dy, \\ \text{et } H[\varphi, \psi] &= \iint_O \varphi \psi dx dy. \end{aligned}$$

Si on a  $H[\varphi, \psi] = 0$ , on dira que  $\varphi$  et  $\psi$  sont orthogonales.

Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont supposées continues sur  $\bar{O}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $O$  au sens suivant :

**Définition 2.3.1.** Une fonction  $f$  est dite *continue par morceaux* sur un ouvert  $O$  si  $O$  peut être partitionné en un nombre fini d'ouverts  $O_1, \dots, O_k$  tels que les  $O_i$  aient des frontières continues de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, et si  $f$  est continue sur tout fermé inclus dans un des  $O_i$ .

Nous allons trouver les valeurs propres en considérant le problème comme un problème de minimisation. Si la condition aux limites est  $u = 0$ , on impose que  $\varphi$  et  $\psi$  soient continues sur  $\bar{O}$  et soient nulles sur  $\Gamma$ .

Les conditions pré-citées sont appelées conditions d'admissibilité. On a le théorème suivant :

**Théorème 2.3.2.** *La fonction admissible  $\varphi$  qui minimise  $\mathfrak{D}[\varphi]$  sous la condition  $H[\varphi] = 1$  est une fonction propre  $u_1$  de l'équation (2.1) et satisfait la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ . La valeur propre correspondante est  $\lambda_1 = \mathfrak{D}[u_1]$ .*

*Si la condition  $H[\varphi, u_1] = 0$  est rajoutée à la condition  $H[\varphi] = 1$ , la solution du problème est également une fonction propre  $u_2$  de l'équation (2.1) qui satisfait la même condition aux limites. La valeur propre associée est  $\lambda_2 = \mathfrak{D}[u_2]$ .*

*Les problèmes de minimisation successifs  $\mathfrak{D}[\varphi] = \inf \mathfrak{D}[\psi]$  sous les conditions  $H[\varphi] = 1$  et  $H[\varphi, u_i] = 0, i = 1, \dots, k-1$  définissent les fonctions propres  $u_k$  de l'équation (2.1) qui satisfont à la condition  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ . Les valeurs propres associées sont les  $\lambda_k = \mathfrak{D}[u_k]$ .*

**Remarques :**

1. Si la condition aux limites est  $u = 0$ , il ne faut pas oublier de rajouter dans les conditions des problèmes de minimisation la condition  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma$ .
2. On omet généralement la condition de normalisation  $H[\varphi] = 1$ , et on cherche à minimiser le quotient  $\mathfrak{D}[\varphi]/H[\varphi]$ . La fonction propre obtenue est alors, à un facteur constant près, la fonction recherchée dans le théorème.

*Démonstration du théorème.* Le fait que notre problème de minimisation possède des solutions est un résultat d'analyse fonctionnelle, que nous admettons ici.

Il nous faut montrer que les solutions de ce problème sont des fonctions propres de notre équation, et que les valeurs propres obtenues sont **toutes** les valeurs propres. Ce dernier point sera montré plus tard, une fois que nous aurons établi d'autres résultats.

Commençons donc par la solution du premier problème : cette fonction  $u_1$  minimise  $\mathfrak{D}[\varphi]$  sous l'hypothèse  $H[\varphi] = 1$ . Notons  $\lambda_1 = \mathfrak{D}[u_1]$ . Si  $\psi$  est une fonction admissible pour le problème et si  $\alpha$  est une constante réelle, on a par définition de  $u_1$  et  $\lambda_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}[u_1 + \alpha\psi]}{H[u_1 + \alpha\psi]} \geq \lambda_1 &\Leftrightarrow \mathfrak{D}[u_1 + \alpha\psi] \geq \lambda_1 H[u_1 + \alpha\psi] \\ &\Leftrightarrow 2\alpha(\mathfrak{D}[u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi]) + \alpha^2(\mathfrak{D}[\psi] - \lambda_1 H[\psi]) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha(\mathfrak{D}[u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi]) + \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{D}[\psi] - \lambda_1 H[\psi]) \geq 0. \end{aligned}$$

On s'est servi ici du fait que  $\frac{\mathfrak{D}[u_1]}{H[u_1]} = \lambda_1$ .

On obtient :

$$\begin{aligned} \forall \alpha > 0, \quad \mathfrak{D}[u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] + \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{D}[\psi] - \lambda_1 H[\psi]) &\geq 0 \\ \text{et } \forall \alpha < 0, \quad \mathfrak{D}[u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] + \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{D}[\psi] - \lambda_1 H[\psi]) &\leq 0 \end{aligned}$$

donc, en faisant tendre  $\alpha$  vers 0, on a

$$\mathfrak{D}[u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] \geq 0 \text{ et } \mathfrak{D}[u_1, \psi] - \lambda_1 H[u_1, \psi] \leq 0.$$

Finalement, on a  $\mathfrak{D}[u_1, \psi] = \lambda_1 H[u_1, \psi] \quad \forall \psi$ .

On utilise la formule de Green pour transformer l'expression de  $\mathfrak{D}[u_1, \psi]$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[u_1, \psi] &= \iint_O ((u_1)_x \psi_x + (u_1)_y \psi_y) dx dy + \int_{\Gamma} \sigma u_1 \psi ds \\ &= \iint_O -\psi \Delta u_1 dx dy + \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial u_1}{\partial n} ds + \int_{\Gamma} \sigma u_1 \psi ds \end{aligned}$$

et, puisque  $\mathfrak{D}[u_1, \psi] = \lambda_1 H[u_1, \psi] = \lambda_1 \iint_O u_1 \psi dx dy$ , on a

$$\forall \psi, \quad \iint_O \psi \left[ \lambda_1 u_1 + \Delta u_1 \right] dx dy - \int_{\Gamma} \psi \left[ \frac{\partial u_1}{\partial n} + \sigma u_1 \right] ds = 0. \quad (2.2)$$

On en déduit facilement, en prenant alternativement des fonctions  $\psi$  continues à support compact nulles soit sur  $O$  soit sur  $\text{Fr}(O)$ , qu'on a

$$\begin{cases} \Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0 & \text{sur } O \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} + \sigma u_1 = 0 & \text{sur } \text{Fr}(O). \end{cases}$$

Considérons à présent la solution du deuxième problème de minimisation : cette fonction  $u_2$  minimise  $\mathfrak{D}[\varphi]$  sous les hypothèses  $H[\varphi] = 1$  et  $H[\varphi, u_1] = 0$ . Notons  $\lambda_2 = \mathfrak{D}[u_2]$ . Si on refait la démonstration précédente, on obtient l'équation suivante

$$\mathfrak{D}[u_2, \psi] = \lambda_2 H[u_2, \psi]. \quad (2.3)$$

mais seulement sous la condition  $H[\psi, u_1] = 0$  (en effet la somme  $u_2 + \alpha\psi$  est aussi orthogonale à  $u_1$  sous cette hypothèse). Il nous faut donc adapter la démonstration : si  $g$  est une fonction continue de classe  $\mathcal{C}^2$  par morceaux sur  $O$ , alors la fonction  $\omega = g - H[u_1, g]u_1$  est orthogonale à  $u_1$ .

De plus, puisqu'on a  $\mathfrak{D}[u_1, \psi] = \lambda_1 H[u_1, \psi] \quad \forall \psi$ , en substituant  $u_2$  à  $\psi$  et en tenant compte de l'orthogonalité de  $u_1$  et  $u_2$ , on a  $\mathfrak{D}[u_1, u_2] = 0$ .

En substituant finalement  $\omega$ , qui est orthogonale à  $u_1$ , à  $\psi$  dans l'équation (2.3), on a :

$$\forall g \quad \mathfrak{D}[u_2, g] - \lambda_2 H[u_2, g] + H[u_1, g] \left[ \mathfrak{D}[u_1, u_2] - \lambda_2 H[u_1, u_2] \right] = 0,$$

et donc

$$\forall g \quad \mathfrak{D}[u_2, g] = \lambda_2 H[u_2, g]. \quad (2.4)$$

On termine la démonstration comme avant, ce qui donne :

$$\begin{cases} \Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0 & \text{sur } O \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} + \sigma u_2 = 0 & \text{sur } \text{Fr}(O). \end{cases}$$

On montre par récurrence que les fonctions  $u_i$  vérifient le système

$$\begin{cases} \Delta u_i + \lambda_i u_i = 0 & \text{sur } O \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} + \sigma u_i = 0 & \text{sur } \text{Fr}(O). \end{cases}$$

(on adapte la démonstration précédente en retranchant à une fonction quelconque  $g$  sa projection sur le sous-espace  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1})$ , et la nouvelle fonction obtenue vérifie les conditions d'orthogonalité voulues...).

On a de plus les relations  $\mathfrak{D}[u_i, u_k] = \lambda_i \delta_{ik}$ ,  $H[u_i, u_k] = \delta_{ik}$ , et les inégalités successives  $\lambda_{i-1} \leq \lambda_i$ , puisqu'à chaque étape la classe de fonctions admissibles dans le problème de minimisation est un sous-ensemble de la précédente.  $\square$

Ce théorème comporte pourtant un défaut : pour définir la  $n$ -ième valeur propre, on doit faire référence aux précédentes. On va donc y apporter une amélioration : dans un des problèmes de minimisation, on conserve la condition  $H[\varphi] = 1$  et on remplace les conditions d'orthogonalité par les conditions

$$H[\varphi, v_i] = 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

où  $v_1, \dots, v_{n-1}$  sont  $n-1$  fonctions continues par morceaux sur  $O$ . Sous ces conditions, les fonctionnelles  $\mathfrak{D}[\varphi]$  admettent une borne inférieure, qui dépend des  $v_k$ , et qui sera notée  $d(v_1, \dots, v_{n-1})$ .

**Théorème 2.3.3.** *Soit  $\mathcal{CM}(O)$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $O$ . La  $n$ -ième valeur propre  $\lambda_n$  pour la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$  est telle que :*

$$\lambda_n = \sup_{\mathcal{CM}(O)} d(v_1, \dots, v_{n-1})$$

et cette borne supérieure est atteinte pour  $v_i = u_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

Si la condition aux limites est  $u = 0$ , cette condition est rajoutée aux conditions d'admissibilité des fonctions  $\varphi$ .

*Démonstration.* On sait déjà que  $\lambda_n = d(u_1, \dots, u_{n-1})$  par le théorème précédent. Soient maintenant  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathcal{CM}(O)$ , montrons que  $d(v_1, \dots, v_{n-1}) \leq \lambda_n$ .

Pour cela, il suffit de trouver une fonction  $\varphi$ , orthogonale aux  $v_i$ , telle que  $\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n$ .

**Analyse :** Soient  $(c_1, \dots, c_n)$   $n$  constantes réelles. Considérons la fonction  $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i u_i$ . Le système de conditions  $H[\varphi, u_i] = 0$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  est un système linéaire homogène de  $n-1$  équations à  $n$  inconnues, donc il existe un  $n$ -uplet  $(c_1, \dots, c_n)$  satisfaisant à ces conditions, et il est défini à un facteur multiplicatif près. La condition  $H[\varphi] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j H[u_i, u_j] = \sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$  est une condition de normalisation qui détermine le facteur de proportionnalité. Il existe donc un  $n$ -uplet satisfaisant à ces conditions.

**Synthèse :** Soit un tel  $n$ -uplet. Se rappelant que  $\mathfrak{D}[u_i, u_i] = \lambda_i \delta_{ij}$ ,

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \mathfrak{D}[u_i, u_j] = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i \leq \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 \right) \lambda_n = \lambda_n$$

car  $\lambda_i \leq \lambda_n$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Finalement  $\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n$ , donc  $d(v_1, \dots, v_{n-1}) \leq \lambda_n$ .  $\square$

On dit que  $\lambda_n$  est un *maximum-minimum* de la fonctionnelle  $\mathfrak{D}[\varphi]$ .

Le théorème que nous venons de montrer est très important, car il permet de traiter de la  $n$ -ième valeur propre sans faire référence aux précédentes, idée que nous exploiterons plusieurs fois dans la résolution de notre problème.

## 2.4 Propriétés des valeurs propres

Remarquons d'abord que, si  $O$  s'écrit comme réunion disjointe  $\bigcup_{i=1}^n O_i$  où les  $O_i$  sont des ouverts, alors l'ensemble des valeurs propres et des fonctions propres de  $O$  est la réunion des ensembles des valeurs propres et des fonctions propres de tous les  $O_i$ , au sens où chaque fonction propre est identiquement nulle sur tous les  $O_i$  sauf un.

En effet, il suffit de voir que, pour tout  $i$ , si  $f$  est une fonction propre d'un des  $O_i$  pour la valeur propre  $\mu$ , alors la fonction  $g$ , qui vaut  $f$  sur  $O_i$  et 0 ailleurs, est une fonction propre de  $O$ , pour la valeur propre  $\mu$ , de même que toute combinaison linéaire de telles fonctions propres pour la même valeur propre.

Réciproquement, si  $h$  est une fonction propre de  $O$  pour la valeur propre  $\lambda$ , alors il existe un entier  $j$  tel que  $h$  ne soit pas identiquement nulle sur un des  $O_j$ . Alors la restriction  $h|_{O_j}$  est une fonction propre de  $O_j$ . On écrit donc que

$$h = \sum_{j=1}^n h|_{O_j}$$

et les termes dans la somme sont soit nuls, soit des fonctions propres des  $O_j$  pour la même valeur propre  $\lambda$ , ce qui prouve notre affirmation. Celle-ci sera importante plus tard dans notre propos.

La propriété du maximum-minimum des valeurs propres est très importante en physique. En effet, toute contrainte supplémentaire sur un système vibrant peut être exprimée mathématiquement, et se traduit ainsi comme un renforcement des conditions d'admissibilité des fonction  $\varphi$  : la valeur du minimum-maximum, et donc des fréquences propres, augmente. Inversement, si on retire une contrainte, on enlève une condition d'admissibilité, ce qui diminue la valeur des fréquences possibles. D'où la proposition suivante :

**Proposition 2.4.1.** *Si un système vibrant est soumis à des contraintes supplémentaires, la fréquence du mode fondamental et des harmoniques augmente. Inversement, si des contraintes sont retirées, la fréquence du mode fondamental et des harmoniques diminue.*

Ce principe conduit à des résultats très importants sur la distribution des valeurs propres : nous allons en énoncer (et démontrer) quelques-uns ici.



**Théorème 2.4.2.** *Supposons que  $O_1, \dots, O_k$  soient  $k$  ouverts connexes bornés  $\mathcal{C}^1$  deux à deux disjoints et inclus dans  $O$ . Soit  $\kappa \in \mathbb{R}$ , notons  $A_i(\kappa)$  (respectivement  $A(\kappa)$ ) le nombre de valeurs propres inférieures à  $\kappa$  de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$ , avec la condition aux limites  $u = 0$  sur  $\text{Fr}(O_i)$  (respectivement  $\text{Fr}(O)$ ). Alors on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^k A_i(\kappa) \leq A(\kappa).$$

*On peut formuler ce théorème de façon équivalente : pour la condition aux limites  $u = 0$ , la  $n$ -ième valeur propre  $\lambda_n$  pour  $O$  est inférieure ou égale à  $\lambda_n^*$ , où  $\lambda_n^*$  est le  $n$ -ième élément de la suite des valeurs propres des  $O_i$  ordonnées par ordre croissant et avec multiplicité.*

*Démonstration.* Dans le problème du maximum-minimum qui définit  $\lambda_n$ , on impose que chaque fonction admissible  $\varphi$  soit nulle sur les  $\text{Fr}(O_i)$  et sur  $O \setminus (\bigcup_{i=1}^k O_i)$ . Ceci correspond à une contrainte supplémentaire, donc la valeur du maximum-minimum augmente. Et le nouveau problème obtenu définit précisément  $\lambda_n^*$ , donc on a  $\lambda_n \leq \lambda_n^*$ , ce qu'on voulait montrer.  $\square$

On tire de ce théorème un corollaire important :

**Corollaire 2.4.3.** *Pour la condition aux limites  $u = 0$ , la  $n$ -ième valeur propre de  $O$  est toujours inférieure à la  $n$ -ième valeur propre de toute partie ouverte de  $O$ .*

Le théorème admet une contrepartie pour la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  :

**Théorème 2.4.4.** *Supposons que  $O = \bigcup_{i=1}^k O_i$ , où les  $O_1, \dots, O_k$  sont des ouverts connexes bornés  $\mathcal{C}^1$  qui sont disjoints. Soit  $\kappa \in \mathbb{R}$ , notons  $B_i(\kappa)$  (respectivement  $B(\kappa)$ ) le nombre de valeurs propres inférieures à  $\kappa$  de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$ , avec la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\text{Fr}(O_i)$  (respectivement  $\text{Fr}(O)$ ). Alors on a l'inégalité*

$$B(\kappa) \leq \sum_{i=1}^k B_i(\kappa).$$

*On peut formuler ce théorème de façon équivalente : pour la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , la  $n$ -ième valeur propre  $\mu_n$  pour  $O$  est supérieure ou égale à  $\mu_n^*$ , où  $\mu_n^*$  est le  $n$ -ième élément de la suite des valeurs propres des  $O_i$  ordonnées par ordre croissant et avec multiplicité.*

*Démonstration.* Dans le problème du maximum-minimum définissant  $\mu_n$ , on autorise les fonctions  $\varphi$  à être discontinues aux interfaces  $\text{Fr}(O_i)$ , ce qui correspond à un allègement des conditions, donc la valeur du maximum-minimum diminue. Et le nouveau problème obtenu définit précisément  $\mu_n^*$  (le fait d'autoriser les fonctions à être discontinues permet d'avoir des fonctions identiquement nulles sur tous les  $O_i$  sauf un, et ainsi d'obtenir les fonctions propres des  $O_i$  pour ce type de problème). Donc  $\mu_n^* \leq \mu_n$ , ce que nous voulions montrer.  $\square$

On va maintenant classer les conditions aux limites, suivant qu'elles soient plus ou moins restrictives. On a le théorème suivant :

**Théorème 2.4.5.** Soit  $\lambda_n$  la  $n$ -ième valeur propre de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  pour  $O$  avec la condition aux limites  $u = 0$ , et soit  $\mu_n$  la  $n$ -ième valeur propre pour la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$  sur une partie  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  de la frontière, et  $u = 0$  sur  $\Gamma \setminus \Gamma_1$ . Alors  $\mu_n \leq \lambda_n$ .

*Démonstration.* Dans le problème définissant  $\mu_n$ , on a la condition d'admissibilité  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma_1$ , et pour  $\lambda_n$ , on a la condition d'admissibilité  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma$ . Cette dernière est plus restrictive que la première car  $\Gamma_1 \subset \Gamma$ . Donc  $\mu_n \leq \lambda_n$ .  $\square$

Si les valeurs propres peuvent être classées en fonction des conditions aux limites, elles peuvent aussi l'être suivant les valeurs de  $\sigma$  :

**Théorème 2.4.6.** Si, dans la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ , on remplace la fonction  $\sigma$  par une fonction  $\sigma_1 \geq \sigma$  (respectivement  $\sigma_1 \leq \sigma$ ), alors la  $n$ -ième valeur propre augmente (respectivement diminue).

*Démonstration.* On a  $\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_{\Gamma} \sigma \varphi^2 ds$ . Donc, à  $\varphi$  fixée, si  $\sigma$  est remplacée par  $\sigma_1 \geq \sigma$  (respectivement  $\sigma_1 \leq \sigma$ ), alors  $\mathfrak{D}[\varphi]$  augmente (respectivement diminue). Donc  $d(v_1, \dots, v_{n-1})$  augmente (respectivement diminue) aussi, pour toutes  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathcal{CM}(O)$ , puis, en prenant le sup,  $\sup_{\mathcal{CM}(O)} d(v_1, \dots, v_{n-1})$  augmente (respectivement diminue). Autrement dit, les valeurs propres augmentent (respectivement diminuent).  $\square$

Ainsi, si on augmente  $\sigma$  progressivement de  $\sigma \equiv 0$  jusqu'à  $\sigma \equiv \infty$ , chaque valeur propre  $\mu_n$  augmente jusqu'à atteindre la valeur propre  $\lambda_n$ , car lorsque  $\sigma \equiv 0$ , on a la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , et lorsque  $\sigma \equiv \infty$ , on a la condition aux limites  $u = 0$ . Autrement dit, la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  est la moins restrictive, tandis que la condition aux limites  $u = 0$  est la plus restrictive.

**Théorème 2.4.7.** Pour toute condition aux limites, si  $(\lambda_n)$  est la suite des valeurs propres du problème, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ .

*Démonstration.* Ce résultat est une conséquence de l'étude asymptotique 2.5.  $\square$

Ceci nous permet de montrer que l'ensemble des fonctions propres obtenues en résolvant les problèmes de minimisation successifs constitue l'ensemble de toutes les fonctions propres. Auparavant, montrons un théorème plus général :

**Théorème 2.4.8.** Le système de fonctions propres associé aux minimisations successives du quotient  $\mathfrak{D}[\varphi]/H[\varphi]$  est complet, au sens où, pour toute fonction  $f$  admissible au problème, et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$   $n$  réels tels que, si  $\omega_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$  (où  $u_1, \dots, u_n$  sont les  $n$  premières fonctions propres), on ait  $H[f - \omega_n] < \varepsilon$ . La meilleure approximation est obtenue pour  $\alpha_i = H[f, u_i]$ , et on a  $H[f] = \sum_{i=1}^{+\infty} (H[f, u_i])^2$ .

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction admissible pour le problème et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $\rho_n = f - \sum_{i=1}^n c_i u_i$ , où  $c_i = H[f, u_i]$ . On a, pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  :

$$\begin{aligned} H[\rho_n, u_i] &= H[f, u_i] - \sum_{k=1}^n c_k H[u_k, u_i] \\ &= H[f, u_i] - \sum_{k=1}^n c_k \delta_{ik} \quad (\text{orthogonalité}) \\ &= H[f, u_i] - c_i \\ &= H[f, u_i] - H[f, u_i] = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[\rho_n, u_i] &= \mathfrak{D}[f, u_i] - \sum_{k=1}^n c_k \mathfrak{D}[u_k, u_i] \\ &= \mathfrak{D}[f, u_i] - \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k \delta_{ik} \\ &= \mathfrak{D}[f, u_i] - \lambda_i c_i \\ &= \mathfrak{D}[f, u_i] - \lambda_i H[f, u_i] \\ &= 0 \quad (\text{car } f \text{ est admissible, voir preuve du théorème 2.3.2}). \end{aligned}$$

Puisque  $\forall i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $H[\rho_n, u_i] = 0$ , et que  $\rho_n$  est admissible, on a par minimalité de  $\lambda_{n+1}$  :

$$\frac{\mathfrak{D}[\rho_n]}{H[\rho_n]} \geq \lambda_{n+1} \Leftrightarrow \mathfrak{D}[\rho_n] \geq \lambda_{n+1} H[\rho_n] \quad (*).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[f] &= \mathfrak{D}[\rho_n] + 2\mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i, \rho_n\right] + \mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i\right] \\ &= \mathfrak{D}[\rho_n] + \mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i\right] \quad (\mathfrak{D}[u_i, \rho_n] = 0). \end{aligned}$$

Or  $\mathfrak{D}[\sum_{i=1}^n c_i u_i] = \sum_{i=1}^n c_i^2 \mathfrak{D}[u_i, u_i] = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i$ , donc, puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ , il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i \geq M$ .

Ainsi,

$$\mathfrak{D}[\rho_n] = \mathfrak{D}[f] - \mathfrak{D}[\sum_{i=1}^n c_i u_i] \leq \mathfrak{D}[f] - M.$$

La suite  $(\mathfrak{D}[\rho_n])$  est donc majorée. En utilisant l'inégalité (\*), on a

$$\lambda_{n+1} H[\rho_n] \leq \mathfrak{D}[f] - M \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ , on a par cette inégalité  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H[\rho_n] = 0$ . Enfin, on a

$$\begin{aligned} H[\rho_n] &= H\left[f - \sum_{i=1}^n c_i u_i\right] = H[f] - 2H\left[f, \sum_{i=1}^n c_i u_i\right] + H\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i\right] \\ &= H[f] - 2H\left[\rho_n + \sum_{i=1}^n c_i u_i, \sum_{i=1}^n c_i u_i\right] + H\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i\right] \\ &= H[f] - H\left[\sum_{i=1}^n c_i u_i\right] - 2\sum_{i=1}^n c_i H[\rho_n, u_i] \\ &= H[f] - \sum_{i=1}^n c_i^2 \end{aligned}$$

ce qui donne  $H[f] = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i^2$  (en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'égalité ci-dessus). De plus, si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont  $n$  réels, on a, avec  $\omega_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$  :

$$\begin{aligned}
H[f - \omega_n] &= H[f] - 2H\left[f, \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right] + H\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right] \\
&= H[f] - 2\sum_{i=1}^n \alpha_i H[f, u_i] + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\
&= H[f] + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - H[f, u_i])^2 - \sum_{i=1}^n (H[f, u_i])^2 \\
&\geq H[f] - \sum_{i=1}^n (H[f, u_i])^2,
\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si  $\alpha_i = H[f, u_i] \forall i$ . La meilleure approximation est donc obtenue pour  $\alpha_i = H[f, u_i] \forall i$ . D'où le théorème.  $\square$

**Corollaire 2.4.9.** *Toutes les valeurs propres de l'équation sont obtenues au cours de la résolution des problèmes de minimisation successifs du théorème 2.3.2, et le système de fonctions propres obtenu lors de ce processus engendre l'ensemble des fonctions propres.*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que, si  $u_i$  et  $u_k$  sont deux fonctions propres associées respectivement à deux valeurs propres distinctes  $\mu_i$  et  $\mu_k$ , on a

$$\begin{aligned}
(\mu_i - \mu_k) \iint_O u_i u_k \, dx \, dy &= \iint_O \mu_i u_i u_k - \iint_O \mu_k u_k u_i \, dx \, dy \\
&= \iint_O (u_i \Delta u_k - u_k \Delta u_i) \, dx \, dy \\
&= \int_{\Gamma} \left[ u_i \frac{\partial u_k}{\partial n} - u_k \frac{\partial u_i}{\partial n} \right] ds \\
&\quad - \iint_O [(u_i)_x (u_k)_x + (u_i)_y (u_k)_y] \, dx \, dy \\
&\quad + \iint_O [(u_i)_x (u_k)_x + (u_i)_y (u_k)_y] \, dx \, dy \\
&= \int_{\Gamma} \left[ u_i \frac{\partial u_k}{\partial n} - u_k \frac{\partial u_i}{\partial n} \right] ds.
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule de Green pour l'avant-dernière égalité. La dernière intégrale est clairement nulle si la condition aux limites est  $u = 0$ ; si celle-ci est  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ , on a

$$\int_{\Gamma} \left[ u_i \frac{\partial u_k}{\partial n} - u_k \frac{\partial u_i}{\partial n} \right] ds = \int_{\Gamma} [-\sigma u_i u_k + \sigma u_i u_k] ds = 0.$$

D'où, puisque  $(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$ ,  $H[u_i, u_k] = \iint_O u_i u_k \, dx \, dy = 0$ .

Supposons alors qu'il existe une valeur propre  $\mu$  qui ne soit pas obtenue lors du processus de minimisation :  $\mu \neq \lambda_n \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $v$  la fonction propre associée; par hypothèse  $v$  n'est pas identiquement nulle. On a, par le théorème précédent, et en se servant de la remarque ci-dessus :

$$H[v] = \sum_{i=1}^{+\infty} (H[v, u_i])^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Puisque  $H[v] = \iint_O v^2 dx dy = 0$  et que  $v$  est continue, on a  $v \equiv 0$ , d'où la contradiction recherchée.

S'il existe une fonction propre  $w$  dont la valeur propre associée est un élément de la suite des  $\lambda_n$ , disons  $\lambda_i$ , notons  $v_1, \dots, v_k$  les fonctions propres associées à  $\lambda_i$ , obtenues au cours des minimisations successives, et notons  $g = w - \sum_{j=1}^k H[w, v_j]v_j$ .  $g$  est également une fonction propre associée à  $\lambda_i$ , donc elle est orthogonale à toutes les fonctions propres associées à des valeurs propres différentes de  $\lambda_i$ . De plus,

$$\forall j, 1 \leq j \leq k, \quad H[g, v_j] = H[w, v_j] - H[w, v_j] = 0$$

donc  $g$  est orthogonale à toutes les fonctions propres ( $u_n$ ). Comme précédemment,

$$H[g] = \sum_{i=1}^{+\infty} (H[g, u_i])^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Donc,  $g$ , qui est continue, est nulle :  $g \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ . Ainsi, le système de fonctions propres obtenu au cours des minimisations successives engendre l'ensemble des fonctions propres.  $\square$

Ce corollaire achève la démonstration du théorème 2.3.2.

Avant de déterminer la distribution asymptotique des valeurs propres, il nous faut un théorème sur le comportement des valeurs propres lorsqu'on "déforme" le domaine considéré, au sens suivant :

**Définition 2.4.10. (Déformation d'un domaine  $G$  en un domaine  $G'$ )**

Soit  $G$  un domaine ouvert connexe borné. Considérons la transformation

$$\begin{cases} X = x + g(x, y) \\ Y = y + h(x, y) \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $g$  et  $h$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $G$  qui sont, ainsi que leurs dérivées partielles premières, majorées en valeur absolue par un nombre  $\varepsilon > 0$ . Notons  $G'$  le domaine image de  $G$  par cette transformation. Alors on dit que  $G'$  est une *déformation de  $G$  à la précision  $\varepsilon$* .

On a le théorème suivant :

**Théorème 2.4.11.** *Soit  $G$  un domaine ouvert connexe borné du plan, de frontière  $\Gamma$ , une courbe continue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1/4$  et toute condition aux limites considérée, si  $G'$  est une déformation de  $G$  à la précision  $\varepsilon$ , alors il existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $n$  et pour toute condition aux limites considérée, si  $\mu_n$  (respectivement  $\mu'_n$ ) désigne la  $n$ -ième valeur propre de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  pour le domaine  $G$  (respectivement pour le domaine  $G'$ ), alors*

$$\left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| < \eta(\varepsilon).$$

De plus  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \eta(\varepsilon) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $G'$  une déformation du domaine  $G$  à la précision  $\varepsilon$ ; on reprend les notations de la définition. Soit  $\varphi$  une fonction admissible pour le problème. On va montrer qu'on peut exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $X$  et  $Y$ . Pour cela, considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x, y, X, Y) = \begin{pmatrix} x + g(x, y) - X \\ y + h(x, y) - Y \end{pmatrix}.$$

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  car  $g$  et  $h$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $G$ . La différentielle de  $f$  au point  $(x, y, X, Y)$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + g_x(x, y) & g_y(x, y) & -1 & 0 \\ h_x(x, y) & 1 + h_y(x, y) & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice extraite

$$\begin{pmatrix} 1 + g_x(x, y) & g_y(x, y) \\ h_x(x, y) & 1 + h_y(x, y) \end{pmatrix}$$

a pour déterminant  $(1 + g_x(x, y))(1 + h_y(x, y)) - g_y(x, y)h_x(x, y)$ . En considérant les conditions imposées à  $g$ ,  $h$  et leurs dérivées partielles, on a l'inégalité

$$\forall x, y \in G \quad (1 + g_x(x, y))(1 + h_y(x, y)) - g_y(x, y)h_x(x, y) \geq 1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 > 0$$

car  $\varepsilon \leq 1/4$ . Donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à  $f$ , pour en déduire que  $x$  et  $y$  peuvent s'écrire en fonction de  $X$  et  $Y$ .

On considère alors une fonction  $\Phi$  telle que  $\Phi(X, Y) = \varphi(x, y)$ . On a, par différentiation d'une fonction composée

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi(x+g(x, y), y+h(x, y))) = \frac{\partial \Phi}{\partial X}(X, Y)(1 + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)) + \frac{\partial \Phi}{\partial Y}(X, Y) \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$$

et de même

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial X}(X, Y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial Y}(X, Y)(1 + \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)).$$

Au moyen du changement de variables

$$\begin{cases} X = x + g(x, y) \\ Y = y + h(x, y) \end{cases}$$

de jacobien

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 1 + g_x(x, y) & h_x(x, y) \\ g_y(x, y) & 1 + h_y(x, y) \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1 + g_x(x, y))(1 + h_y(x, y)) - g_y(x, y)h_x(x, y)},$$

et en considérant  $x, y$  comme des fonctions de  $X, Y$ , on a l'égalité

$$D[\varphi] = \iint_{G'} \left[ [\Phi_X(X, Y)(1 + g_x(x, y)) + \Phi_Y(X, Y)h_x(x, y)]^2 + [\Phi_X(X, Y)g_y(x, y) + \Phi_Y(X, Y)(1 + h_y(x, y))]^2 \right] J(x, y) dX dY.$$

On fixe un point  $A \in \Gamma$ , et on mesure l'abscisse curviligne de  $\Gamma$  à partir de  $A$ . On désigne par  $S$  l'abscisse curviligne d'un point de la frontière  $\Gamma'$  de  $G'$  mesurée à partir de l'image de  $A$  par la transformation (2.5), et on se donne une fonction  $\Sigma$  telle que  $\sigma(x(s), y(s)) = \Sigma(X(S), Y(S))$ .

Avec ces notations, on a

$$\int_{\Gamma} \sigma(x(s), y(s)) \varphi^2(x(s), y(s)) ds = \int_{\Gamma'} \Sigma(X(S), Y(S)) \Phi^2(X(S), Y(S)) \frac{ds}{dS} dS.$$

On note maintenant

$$D'[\Phi] = \iint_{G'} (\Phi_X^2 + \Phi_Y^2) dX dY, \quad \mathcal{D}'[\Phi] = D'[\Phi] + \int_{\Gamma'} \Sigma \Phi^2 dS.$$

L'intégrande de  $D'[\Phi]$  diffère de celle de  $D[\varphi]$  par le facteur  $J(x, y)$ , qui tend vers 1 uniformément en  $x$  et  $y$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et par des termes en  $\Phi_X, \Phi_Y, \Phi_X^2, \Phi_Y^2$  multipliés par des termes qui tendent vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (grâce aux conditions vérifiées par  $g, h$  et leurs dérivées partielles). En utilisant l'inégalité

$$2 \left| \iint_{G'} \Phi_X \Phi_Y dX dY \right| \leq \iint_{G'} (\Phi_X^2 + \Phi_Y^2) dX dY$$

on obtient une relation de la forme

$$D[\varphi] = (1 + \delta_1(\varepsilon)) D'[\Phi]$$

où  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_1(\varepsilon) = 0$ . De plus, si  $\Gamma$  (respectivement  $\Gamma'$ ) sont paramétrées par  $(x(t), y(t))$  (respectivement  $(X(t), Y(t))$ ) pour  $t \in [0, 1]$ , on a les relations

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \text{et} \quad \frac{dS}{dt} = \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}$$

donc par dérivation d'une fonction composée,

$$\frac{ds}{dS} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dS}$$

est du type  $1 + f_\varepsilon(S)$  où  $f_\varepsilon(S)$  tend uniformément vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (grâce aux conditions imposées aux dérivées partielles de  $g$  et  $h$ ).

D'où

$$\int_{\Gamma'} \Sigma \Phi^2 \frac{ds}{dS} dS = \int_{\Gamma'} \Sigma \Phi^2 dS + \int_{\Gamma'} \Sigma \Phi^2 f_\varepsilon dS = (1 + \delta_2(\varepsilon)) \int_{\Gamma'} \Sigma \Phi^2 dS$$

où  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_2(\varepsilon) = 0$ . Ceci donne la relation

$$\mathcal{D}[\varphi] = (1 + \delta_3(\varepsilon)) \mathcal{D}'[\Phi].$$

où  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_3(\varepsilon) = 0$ .

Il nous reste à transformer les conditions de normalisation et d'orthogonalité de  $\varphi$  dans le problème du maximum-minimum. On a les expressions

$$\begin{aligned} \iint_G \varphi^2 dx dy &= \iint_{G'} \Phi^2 J(x, y) dX dY = 1 \\ \text{et} \quad \iint_G \varphi v_i dx dy &= \iint_{G'} \Phi V_i J(x, y) dX dY = 0, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

si  $v_1, \dots, v_{n-1}$  sont  $n-1$  fonctions continues par morceaux sur  $G$  et  $V_1, \dots, V_{n-1}$  sont  $n-1$  fonctions continues par morceaux sur  $G'$  telles que  $V_i(X, Y) = v_i(x, y)$ .

On note à présent

$$\psi(X, Y) = \frac{\Phi(X, Y)}{\sqrt{\iint_G \varphi^2(x, y) J^{-1}(X, Y) dx dy}} \quad \text{et} \quad W_i(X, Y) = V_i(X, Y) J(x, y),$$

et on a

$$\iint_{G'} \psi^2 dX dY = \frac{\iint_G \Phi^2 J(x, y) dX dY}{\iint_G \Phi^2 J(x, y) dX dY} = 1$$

et  $\iint_{G'} \Phi V_i J(x, y) dX dY = \iint_{G'} \psi W_i dX dY = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$

En remarquant que

$$D'[\Phi] = \left( \iint_G \varphi^2(x, y) J^{-1}(X, Y) dx dy \right) D'[\psi]$$

et que

$$\left( \iint_G \varphi^2(x, y) J^{-1}(X, Y) dx dy \right) = 1 + \delta_4(\varepsilon) \quad (\text{où } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_4(\varepsilon) = 0),$$

on a l'égalité

$$D[\varphi] = (1 + \delta(\varepsilon)) D'[\psi] \tag{2.6}$$

où  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ . La fonction  $\psi$  satisfait les conditions d'admissibilité du problème du maximum-minimum pour la  $n$ -ième valeur propre pour le domaine  $G'$ . Le domaine de variabilité des fonctions  $W_i$  est l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $G'$ . Donc le maximum-minimum du membre de gauche de l'équation (2.6) ne diffère de celui du membre de droite que par le terme  $\delta(\varepsilon)$ . Ainsi, il existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| < \eta(\varepsilon).$$

et vérifiant  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0$ . □



## 2.5 Etude asymptotique

Le but de cette section est de trouver un équivalent simple de la  $n$ -ième valeur propre de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$ , pour toute condition aux limites.

### 2.5.1 Un cas particulier : le rectangle

Soit un rectangle  $R = [0, a] \times [0, b]$ , avec  $a, b$  deux réels. On va résoudre l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  avec, dans un premier temps, la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\text{Fr}(R)$ , et ensuite avec la condition aux limites  $u = 0$  sur  $\text{Fr}(R)$ .

**Premier cas :** Montrons que les fonctions

$$u_{m,n}(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

sont les fonctions propres de notre équation.

Clairement

$$(u_{m,n})_{xx} = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2} u_{m,n} \quad \text{et} \quad (u_{m,n})_{yy} = -\frac{\pi^2 m^2}{b^2} u_{m,n},$$

donc :

$$\Delta u_{m,n} + \pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) u_{m,n} = 0.$$

On remarque ensuite que la dérivée normale de  $u_{m,n}$  est nulle sur la frontière, c'est à dire sur  $\{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, M \in R \text{ et } (x = 0 \text{ ou } x = a) \text{ ou } (y = 0 \text{ ou } y = b)\}$ .

En effet, sur les côtés verticaux du rectangle, la dérivée normale est égale (au signe près) à la dérivée par rapport à  $x$ , ce qui fait apparaître un sinus qui est nul sur les côtés verticaux. Sur les côtés horizontaux du rectangle, la dérivée normale est égale (toujours au signe près) à la dérivée par rapport à  $y$ , ce qui fait aussi apparaître un sinus, nul sur les côtés horizontaux.

Donc les  $u_{m,n}$  sont des fonctions propres de notre équation, pour les valeurs propres

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Il reste à montrer que ce sont toutes les fonctions propres. Auparavant, montrons un lemme :

**Lemme 2.5.1.** *Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le rectangle  $R = [0, a] \times [0, b]$ . Si  $f$  vérifie une des deux conditions*

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad \iint_R f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy = 0$$

ou

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \iint_R f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy = 0$$

alors  $f$  est nulle sur  $R$ .

*Démonstration du lemme.* La démonstration étant identique dans les deux cas, supposons que  $f$  vérifie la première condition. On a alors

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^b \left( \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = 0,$$

soit, en notant  $f_n(y) = \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$ ,

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^b f_n(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = 0.$$

Cette égalité implique que pour tout  $n$ , la fonction  $f_n$  est nulle sur  $[0, b]$ , soit

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall y \in [0, b], \quad \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 0$$

et ainsi,  $f(x, y) = 0$  sur  $R$ . □

Nous pouvons maintenant montrer que les  $u_{m,n}$  sont toutes les fonctions propres de notre problème. Soit  $f$  une fonction propre de l'équation avec les mêmes conditions aux limites que précédemment, notons  $\mu$  la valeur propre associée.

- Si  $\mu$  est distincte de toutes les  $\lambda_{m,n}$ , on sait que  $f$  est orthogonale à toutes les  $u_{m,n}$ . Par le lemme 2.5.1,  $f$  est nulle, d'où une contradiction.
- S'il existe un couple d'entiers  $(i, j)$  tel que  $\mu = \lambda_{i,j}$ , notons  $w_1, \dots, w_k$  les éléments de la famille des  $u_{m,n}$ , de valeur propre associée  $\lambda_{i,j}$ . Dans l'esprit de la preuve du corollaire 2.4.9, on définit

$$\omega = f - \sum_{l=1}^k H[f, w_l] \frac{w_l}{H[w_l, w_l]}.$$

$\omega$  est orthogonale à toutes les  $u_{m,n}$ , donc est nulle, par le lemme 2.5.1. Ainsi,  $f \in \text{Vect}(w_1, \dots, w_k)$ .

On a ainsi montré que les  $u_{m,n}$  sont les seules fonctions propres de l'équation considérée pour la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

**Deuxième cas :** Montrons que les fonctions

$$v_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad m, n = 1, 2, \dots$$

sont les fonctions propres de notre équation.

On a immédiatement

$$(v_{m,n})_{xx} = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2} v_{m,n} \quad \text{et} \quad (v_{m,n})_{yy} = -\frac{\pi^2 m^2}{b^2} v_{m,n},$$

d'où :

$$\Delta v_{m,n} + \pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) v_{m,n} = 0.$$

On constate aussi que  $v_{m,n} = 0$  sur la frontière de  $R$ .

Donc les  $v_{m,n}$  sont des fonctions propres de notre équation, pour les valeurs propres

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad m, n = 1, 2, \dots$$

La même idée que dans le premier cas montre que les  $v_{m,n}$  sont les seules fonctions propres de notre équation.

Maintenant que nous avons trouvé toutes les valeurs propres dans ces deux cas, nous allons chercher une estimation de la  $n$ -ième valeur propre pour toute condition aux limites. Pour cela, on va trouver ces estimations dans les deux cas précédents, et on appliquera ensuite les théorèmes 2.4.5 et 2.4.6.

### 2.5.2 Estimation des valeurs propres pour le rectangle

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Notons  $A(\lambda)$  (respectivement  $B(\lambda)$ ) le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  dans le problème avec condition aux limites  $u = 0$  (respectivement  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ).

Avec ces notations, on a

$$A(\lambda) = \text{card} \left\{ m, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2} \right\}$$

et

$$B(\lambda) = \text{card} \left\{ m, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2} \right\}.$$

On remarque que  $B(\lambda)$  est exactement le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le secteur

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2} \right\}$$

c'est-à-dire, le secteur délimité par le quart d'ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda}{\pi^2}$  situé dans le quadrant supérieur droit.

Dans la suite de ce calcul, on note  $\mathcal{E}$  ce quart d'ellipse.

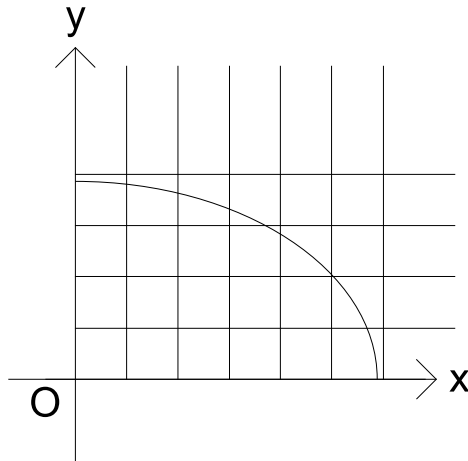


FIG. 2.1 – Les points et l'ellipse

On associe à chaque point  $M$  de  $\mathbb{N}^2$  le carré d'aire 1 dont il est le sommet inférieur gauche, que nous appellerons *carré entier associé à  $M$*  :

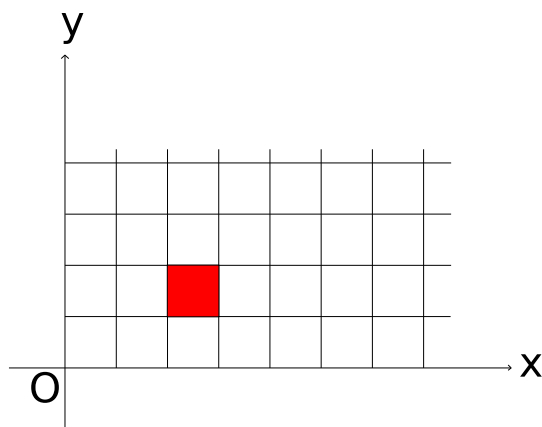


FIG. 2.2 – Carré entier associé à  $(2, 1)$

On constate alors que les carrés entiers associés aux points à coordonnées entières de  $D$  forment un recouvrement de  $D$ . Notons  $S$  la réunion de ces carrés. L'aire de  $S$  est égale au nombre de points à coordonnées entières de  $D$ , soit  $B(\lambda)$ , multiplié par l'aire d'un tel carré, soit 1. Ainsi l'aire de  $S$  est égale à  $B(\lambda)$ , et puisque  $D \subset S$ , on a une inégalité sur les aires, soit, en notant  $\mathcal{A}_D$  l'aire de  $D$  :

$$\mathcal{A}_D \leq B(\lambda).$$

On peut réécrire l'équation de l'ellipse comme  $\frac{x^2}{(\frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b\sqrt{\lambda}}{\pi})^2} = 1$  : le quart d'ellipse a donc pour aire  $\mathcal{A}_D = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \frac{b\sqrt{\lambda}}{\pi} = \lambda \frac{ab}{4\pi}$ .

Ainsi

$$\lambda \frac{ab}{4\pi} \leq B(\lambda).$$

Notons maintenant  $T$  l'ensemble des carrés entiers qui sont traversés par l'ellipse, c'est-à-dire qui ne soient pas entièrement contenus dans  $D$ , et  $R(\lambda) = \text{card}(T)$ .

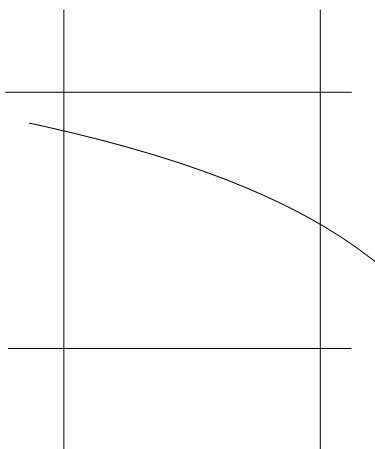


FIG. 2.3 – Un élément de  $T$

Alors  $S \setminus T$  est inclus dans  $D$ , ce qui donne une autre inégalité sur les aires :

$$B(\lambda) - R(\lambda) \leq \lambda \frac{ab}{4\pi}$$

puisque l'aire de  $S \setminus T$  est égale à  $B(\lambda) - R(\lambda)$  multiplié par l'aire d'un carré entier, qui est 1. Finalement :

$$B(\lambda) - R(\lambda) \leq \lambda \frac{ab}{4\pi} \leq B(\lambda). \quad (2.7)$$

Il reste à trouver un ordre de grandeur de  $R(\lambda)$ . Pour cela, remarquons que, pour  $\lambda$  assez grand, la longueur de l'arc d'ellipse contenu dans deux carrés adjacents qu'elle traverse est supérieure à 1. On se place dans ce cas.

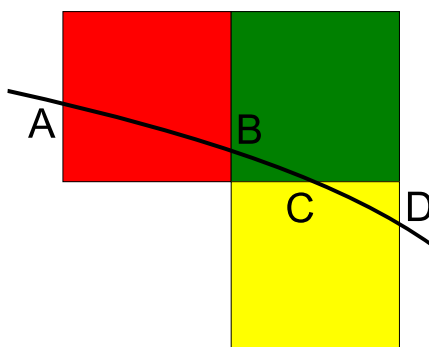


FIG. 2.4 – Méthode de majoration

Sur cet exemple, l'aire du carré vert sera inférieure soit à la longueur  $\widehat{AC}$ , soit à la longueur  $\widehat{BD}$ .

L'aire de  $T$  est  $R(\lambda)$ , et l'idée précédente va permettre de majorer cette aire : écrivons que  $R(\lambda) - 2$  est l'aire totale de  $T'$ , où  $T'$  est obtenu en retirant à  $T$  les deux carrés ayant un côté commun soit avec l'axe  $(Ox)$ , soit avec l'axe  $(Oy)$ .

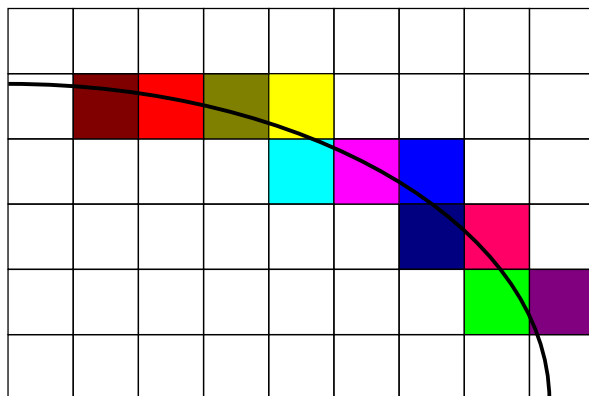


FIG. 2.5 – Représentation de  $T'$

Sur ce dessin, l'aire de  $T'$  est égale à la somme des aires de tous les carrés colorés. Notons  $C_1, \dots, C_k$  ces carrés (numérotés dans le sens horaire, i.e. sur le dessin  $C_1$  est le carré marron,  $C_2$  le carré rouge, ...,  $C_k$  le carré mauve),  $C_0$  le carré ayant un côté contenu

dans l'axe  $(Oy)$  et  $C_{k+1}$  celui ayant un côté contenu dans l'axe  $(Ox)$ . Enfin, définissons les points  $A_0, \dots, A_{k+2}$  par

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathcal{E} \cap (Oy), \\ A_{k+2} &= \mathcal{E} \cap (Ox), \\ A_j &= \mathcal{E} \cap C_{j-1} \cap C_j, \quad j = 1, \dots, k+1. \end{aligned}$$

Pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $k$ , on majore alors l'aire de  $C_j$  par la longueur  $\widehat{A_{j-1}A_{j+1}}$ . D'où

$$R(\lambda) - 2 \leq \sum_{j=1}^k \widehat{A_{j-1}A_{j+1}}.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \widehat{A_{j-1}A_{j+1}} &= \sum_{j=1}^k \widehat{A_{j-1}A_j} + \widehat{A_jA_{j+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \widehat{A_jA_{j+1}} + \sum_{j=1}^k \widehat{A_jA_{j+1}} \\ &\leq 2 \sum_{j=0}^{k+1} \widehat{A_jA_{j+1}}. \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{k+1} \widehat{A_jA_{j+1}}$  la longueur du quart d'ellipse. En le paramétrant par

$$x(t) = \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi} \cos(t), \quad y(t) = \frac{b\sqrt{\lambda}}{\pi} \sin(t), \quad \text{pour } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2\lambda}{\pi^2} \sin^2(t) + \frac{b^2\lambda}{\pi^2} \cos^2(t)} dt \\ &= \sqrt{\lambda} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{\pi^2} \sin^2(t) + \frac{b^2}{\pi^2} \cos^2(t)} dt}_{\text{indépendant de } \lambda, \text{ noté } I} \\ &= I\sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$R(\lambda) - 2 \leq 2I\sqrt{\lambda}.$$

Signalons au passage qu'on peut obtenir l'inégalité plus fine  $R(\lambda) - 1 \leq 2I\sqrt{\lambda}$  (en comptant d'une manière légèrement différente), dont nous n'avons pas besoin ici. En effet, notre inégalité montre que

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{2I}{\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, en se rappelant de la double inégalité (2.7), on a

$$\frac{B(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi} \leq \frac{B(\lambda)}{\lambda},$$

ce qu'on peut réécrire comme

$$\frac{ab}{4\pi} \leq \frac{B(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi} + \frac{R(\lambda)}{\lambda},$$

et finalement

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = \frac{ab}{4\pi}.$$

On a, plus précisément, une relation du type

$$B(\lambda) = \lambda \frac{ab}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

Une telle relation est aussi valable pour  $A(\lambda)$ . En effet,  $A(\lambda)$  ne diffère de  $B(\lambda)$  que par le nombre de points éléments de  $D$  à coordonnées entières et situés sur les axes, ce qu'on peut également interpréter comme la somme des parties entières des longueurs respectives du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse. On a donc

$$B(\lambda) - A(\lambda) \leq \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi} + \frac{b\sqrt{\lambda}}{\pi} = \alpha\sqrt{\lambda},$$

où  $\alpha$  est indépendante de  $\lambda$ . Ainsi :

$$B(\lambda) = A(\lambda) + K\sqrt{\lambda} \Rightarrow A(\lambda) = \lambda \frac{ab}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

Pour obtenir un équivalent de la  $n$ -ième valeur propre  $\lambda_n$  (quand les valeurs propres sont ordonnées par ordre croissant), par exemple dans le problème avec la condition aux limites  $u = 0$ , on écrit  $A(\lambda_n) = n$ , ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{ab}.$$

Cette relation est aussi valable pour l'autre problème considéré.

On peut maintenant étendre ce résultat à un autre type de domaine.

**Définition 2.5.2.** On dit qu'un ouvert connexe  $O \subset \mathbb{R}^2$  est un *ouvert-carré* si  $O$  peut s'écrire comme la réunion d'un nombre fini de carrés de même aire.

Soient  $O$  un ouvert-carré, et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Notons  $A(\lambda)$  le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  pour la condition aux limites  $u = 0$  sur  $\text{Fr}(O)$  et  $B(\lambda)$  le nombre correspondant pour la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\text{Fr}(O)$ .

Puisque  $O$  est un ouvert-carré, notons  $C_1, \dots, C_k$   $k$  carrés de côté  $a$  dont la réunion est égale à  $O$ , et  $A_{R_1}(\lambda), \dots, A_{R_k}(\lambda), B_{R_1}(\lambda), \dots, B_{R_k}(\lambda)$  les nombres correspondants à  $A(\lambda)$  et  $B(\lambda)$  pour les conditions aux limites  $u = 0$  sur  $\text{Fr}(R_j)$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\text{Fr}(R_j)$ .

Par ce qui précède, on a

$$\forall j = 1, \dots, k, \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{R_j}(\lambda) = \lambda \frac{a^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}) \\ B_{R_j}(\lambda) = \lambda \frac{a^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}). \end{array} \right.$$

Par les théorèmes 2.4.2, 2.4.4 et 2.4.5, on a les inégalités suivantes :

$$\sum_{j=1}^k A_{R_j}(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B(\lambda) \leq \sum_{j=1}^k B_{R_j}(\lambda).$$

Or on a

$$\sum_{j=1}^k A_{R_k}(\lambda) = \lambda \frac{ka^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

et

$$\sum_{j=1}^k B_{R_k}(\lambda) = \lambda \frac{ka^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

Et donc, on peut écrire

$$\lambda \frac{ka^2}{4\pi} + \theta(\lambda)\sqrt{\lambda} \leq A(\lambda) \leq B(\lambda) \leq \lambda \frac{ka^2}{4\pi} + \eta(\lambda)\sqrt{\lambda}.$$

où  $\theta$  et  $\eta$  sont des fonctions bornées.

En remarquant finalement que  $ka^2$  est l'aire  $\mathcal{A}$  de  $O$ , on a des relations du type

$$A(\lambda) = \lambda \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

et

$$B(\lambda) = \lambda \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

On peut estimer la  $n$ -ième valeur propre  $\lambda_n$  en écrivant  $A(\lambda_n) = n$ , et on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{\mathcal{A}}.$$

Les théorèmes 2.4.5 et 2.4.6 montrent par double encadrement que ce type d'estimation est valable pour toute condition aux limites considérée. On a le théorème suivant :

**Théorème 2.5.3. (Estimation des valeurs propres pour un domaine-carré)**

Soit  $O$  un ouvert-carré d'aire  $\mathcal{A}$ . Pour la condition aux limites  $u = 0$  ou  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ , où  $\sigma$  est une fonction continue positive sur  $Fr(O)$ , le nombre  $A(\mu)$  de valeurs propres de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  inférieures à une certaine borne positive  $\mu$  est équivalent à  $\mu \frac{\mathcal{A}}{4\pi}$ . Plus précisément :

$$\exists \mu_0 \in \mathbb{R}_+, \exists C \in \mathbb{R}_+, \mu \geq \mu_0 \Rightarrow \left| \frac{4\pi A(\mu)}{\mathcal{A}\mu} - 1 \right| < \frac{C}{\sqrt{\mu}}.$$

Pourtant, le calcul d'une estimation pour une figure géométrique quelconque peut être bien plus complexe, comme on va le voir dans le cas du disque.



### 2.5.3 Cas du disque

Pour simplifier, on considère que l'ouvert  $O$  est un disque ouvert de rayon 1. Dans ce paragraphe, on ne considère que la condition aux limites  $u = 0$  sur  $\text{Fr}(O)$ . L'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  devient, en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \lambda u = 0.$$

On cherche une solution sous la forme  $u(r, \theta) = v(r)w(\theta)$ . Sous cette forme, l'équation ci-dessus devient

$$w(\theta) \left[ v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) + \lambda v(r) \right] = -\frac{1}{r^2}v(r)w''(\theta)$$

ou encore

$$\underbrace{\left[ v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) + \lambda v(r) \right]}_{\text{indépendant de } \theta} \frac{r^2}{v(r)} = \underbrace{-\frac{w''(\theta)}{w(\theta)}}_{\text{indépendant de } r} = k \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $w$  étant nécessairement  $2\pi$ -périodique, on peut écrire  $k = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ceci nous donne l'équation

$$r^2v''(r) + rv'(r) + [\lambda r^2 - n^2]v(r) = 0.$$

Avant de continuer, signalons qu'on peut déduire de la formule de Green une propriété importante des valeurs propres de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de cette équation, et  $v$  une fonction propre associée. On a

$$\iint_G (v_x^2 + v_y^2) dx dy = - \iint_G v \Delta v dx dy + \int_{\Gamma} v \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

Si la condition aux limites est  $u = 0$ , on a  $\int_{\Gamma} v \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0$ , d'où

$$\iint_G (v_x^2 + v_y^2) dx dy = \lambda \iint_G v^2 dx dy.$$

Donc : une valeur propre de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  avec condition aux limites  $u = 0$  est toujours positive.

Revenons à notre étude : puisque  $\lambda$  est positive, on peut faire le changement de variable  $\rho = r\sqrt{\lambda}$ , et l'équation devient

$$r^2\lambda \frac{d^2v}{d\rho^2} + r\sqrt{\lambda} \frac{dv}{d\rho} + [\lambda r^2 - n^2]v = 0$$

ou encore

$$\frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\rho} + \left[ 1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right] v = 0.$$

L'équation ci-dessus est appelée *équation de Bessel d'ordre  $n$* .

On cherche une solution développable en série entière  $v_n(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j$ ; en dérivant terme à terme et en reportant dans l'équation, on a

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j \rho^{j-2} + \sum_{j=1}^{\infty} ja_j \rho^{j-2} + \left( 1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j = 0$$

soit, en groupant les termes :

$$-\frac{n^2}{\rho^2}a_0 + \frac{a_1}{\rho}[1 - n^2] + \sum_{j=2}^{\infty}[j(j-1)a_j + ja_j + a_{j-2} - n^2a_j]\rho^{j-2} = 0.$$

On en déduit la relation de récurrence donnant les  $a_j$  :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \text{ si } n \neq 0, \text{ quelconque sinon} \\ a_1 = 0 \text{ si } n \neq 1, \text{ quelconque sinon} \\ \forall j \geq 2, (n^2 - j^2)a_j = a_{j-2} \end{cases}$$

A partir de là, en se servant de la relation de récurrence, il est facile de voir que les  $a_j$  sont donnés par

$$\begin{cases} a_j = 0 \text{ si } j < n \\ a_n = \text{quelconque} \\ \forall j \geq n+1, (n^2 - j^2)a_j = a_{j-2} \end{cases}$$

Si on choisit  $a_n = \frac{1}{2^n n!}$ , après calculs, la solution  $v_n$  obtenue est

$$v_n(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{n+2j} j! (n+j)!} \rho^{n+2j}.$$

La série entière ci-dessus converge sur tout  $\mathbb{R}$  (car  $\rho^{n+2j} \ll (n+j)!$ ), donc c'est effectivement une solution de notre équation.  $v_n$  est appelée *fonction de Bessel d'ordre  $n$* . La condition aux limites étant  $u = 0$ , cela impose que, puisque  $\rho = r\sqrt{\lambda}$ , on ait  $v_n(\sqrt{\lambda}) = 0$ . Autrement dit, les valeurs propres de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  dans le cas d'un disque avec condition aux limites  $u = 0$  sont les carrés des zéros des fonctions de Bessel. On constate que cette étude est nettement plus difficile que la précédente. Puisque l'étude exacte semble très complexe, on va s'attacher à obtenir une estimation asymptotique indépendante de l'ouvert connexe borné  $\mathcal{C}^1$  considéré. Mais avant cela, il nous faut établir quelques résultats sur les triangles rectangles.

## 2.5.4 Cas du triangle rectangle

Dans tout ce paragraphe, on s'intéresse à la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

Soit  $T$  un triangle rectangle isocèle de côté  $a$ . Considérons le carré  $C$  déduit de  $T$  par réflexion par rapport à son hypoténuse. Si  $u$  est une fonction propre pour le triangle et pour la valeur propre  $\lambda$ , désignons par  $v$  la fonction qui coïncide avec  $u$  sur  $T$  et qui, en un point  $M$  de  $C \setminus T$ , prend la valeur  $u(N)$  où  $N$  est l'image de  $M$  par cette réflexion. Alors  $v$  est continue sur  $C$  et satisfait à la condition aux limites  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  sur  $\text{Fr}(C)$ ; c'est même une fonction propre pour  $C$ , pour la valeur propre  $\lambda$ .

La  $n$ -ième valeur propre pour  $T$  est donc aussi une valeur propre pour  $C$ . Il est donc clair que la  $n$ -ième valeur propre pour le carré  $C$  est inférieure à la  $n$ -ième valeur propre pour le triangle  $T$ . En d'autres termes :

**Proposition 2.5.4.** *Soit un triangle rectangle isocèle  $T$  de côté  $a$  et un carré  $C$  de côté  $a$ . Soit  $\lambda$  un réel, et  $B_T(\lambda)$  (respectivement  $B_C(\lambda)$ ) le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  pour  $T$  (respectivement  $C$ ). Alors, on a*

$$B_T(\lambda) \leq B_C(\lambda).$$

Soit maintenant  $T$  un triangle rectangle quelconque de côtés  $a, b$ , et  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . On suppose que  $b \leq a$ , et que le côté de longueur  $a$  (respectivement  $b$ ) est sur l'axe des abscisses (respectivement l'axe des ordonnées).

Au moyen du changement de variables

$$\begin{cases} X = x \\ Y = ay/b \end{cases}$$

de jacobien

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a/b \end{vmatrix}^{-1} = \frac{b}{a},$$

on transforme le triangle  $T$  en un triangle  $T'$  isocèle rectangle de côté  $a$ . L'expression de la fonctionnelle  $D[\varphi]$  devient

$$D[\varphi] = \iint_{T'} \left[ \varphi_X^2 + \frac{a^2}{b^2} \varphi_Y^2 \right] \frac{b}{a} dX dY$$

et la condition de normalisation  $H[\varphi] = 1$  devient

$$H[\varphi] = \iint_{T'} \varphi^2 \frac{b}{a} dX dY = 1.$$

Les conditions d'orthogonalité  $H[\varphi, v_i] = 0$  restent inchangées.

Notons  $\mu_n$  la  $n$ -ième valeur propre pour le triangle  $T$ . Alors,  $\mu_n$  est le maximum-minimum de l'intégrale

$$D[\varphi] = \iint_{T'} \left[ \varphi_X^2 + \frac{a^2}{b^2} \varphi_Y^2 \right] \frac{b}{a} dX dY$$

sous la condition  $H[\varphi] = b/a$ , ce qui revient, en minimisant les quotients  $D[\varphi]/H[\varphi]$ , à considérer que  $\mu_n$  est le maximum-minimum de l'intégrale

$$D[\varphi] = \iint_{T'} \left[ \varphi_X^2 + \frac{a^2}{b^2} \varphi_Y^2 \right] \frac{b}{a} dX dY.$$

Puisque  $a \geq b$ , on a

$$D[\varphi] = \iint_{T'} \left[ \varphi_X^2 + \frac{a^2}{b^2} \varphi_Y^2 \right] dX dY \geq \iint_{T'} \left[ \varphi_X^2 + \varphi_Y^2 \right] dX dY.$$

Le maximum-minimum du membre de gauche, qui est  $\mu_n$ , est donc supérieur ou égal à celui du membre de droite, qui est la  $n$ -ième valeur propre pour le triangle rectangle isocèle de côté  $a$ , elle-même supérieure à la  $n$ -ième valeur propre pour le carré de côté  $a$ . En d'autres termes :

**Proposition 2.5.5.** *Soit un triangle rectangle  $T$  de côtés  $a$ ,  $b$  et  $\sqrt{a^2 + b^2}$  ( $a \geq b$ ), et un carré  $C$  de côté  $a$ . Soit  $\lambda$  un réel, et  $B_T(\lambda)$  (respectivement  $B_C(\lambda)$ ) le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  pour  $T$  (respectivement  $C$ ). Alors, on a*

$$B_T(\lambda) \leq B_C(\lambda).$$

On a de même la proposition suivante :

**Proposition 2.5.6.** *Soit un rectangle  $R$  de côtés  $a$  et  $b$  ( $a \geq b$ ), et un carré  $C$  de côté  $a$ . Soit  $\lambda$  un réel, et  $B_R(\lambda)$  (respectivement  $B_C(\lambda)$ ) le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  pour  $R$  (respectivement  $C$ ). Alors, on a*

$$B_R(\lambda) \leq B_C(\lambda).$$

Cette proposition se prouve de la même façon, par le même changement de variables que pour le triangle rectangle. Ces résultats, en association avec le théorème 2.4.4, montrent qu'il est possible d'obtenir un majorant du nombre de valeurs propres inférieures à une certaine borne, lorsque le domaine considéré est composé d'un nombre fini de triangles rectangles et de carrés.

On a maintenant tous les outils pour établir les résultats concernant la distribution asymptotique des valeurs propres pour un domaine connexe borné de classe  $\mathcal{C}^1$  quelconque.

### 2.5.5 Cas d'un ouvert connexe borné de classe $\mathcal{C}^1$

Soit  $O$  un tel ouvert. Dans un premier temps, on ne considère que la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . On va approcher  $O$  par des ouverts-carrés, et déduire des paragraphes 2.5.2 et 2.5.3 la distribution des valeurs propres du laplacien sur  $O$ . Notons  $\Gamma$  la frontière de  $O$ . On divise le plan en carrés identiques de côté  $a$ .

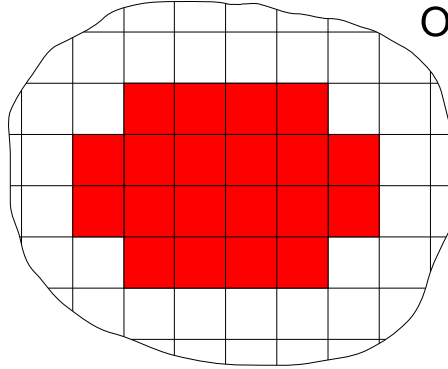


FIG. 2.6 – L'approximation

Soit  $\alpha > 0$ , on prend  $a > 0$  suffisamment petit de sorte que, pour toute portion de frontière contenue dans un des carrés, la variation de l'angle entre le vecteur normal à  $\Gamma$  et l'axe des abscisses soit inférieure à  $\alpha$ .

Comme sur la figure précédente, on associe à la frontière  $r$  domaines adjacents  $E_1, \dots, E_r$  de deux types différents :

1. soit  $E_i$  est délimité par deux segments perpendiculaires  $[AB]$  et  $[AC]$  de la subdivision, dont la longueur est comprise entre  $a$  et  $3a$ , et une partie  $BC$  de la frontière (fig. 2.7) ;
2. soit  $E_i$  est délimité par un segment  $[AB]$  de la subdivision, deux segments perpendiculaires  $[AC]$  et  $[BD]$ , dont la longueur est comprise entre  $a$  et  $3a$ , et une portion  $CD$  de la frontière (fig. 2.8).

On note  $S = \bigcup_{i=1}^r E_i$  (c'est le domaine blanc), de sorte que  $O \setminus S$  (le domaine rouge) est un ouvert-carré, composé de  $k$  carrés  $C_1, \dots, C_k$  de côté  $a$ .

Remarquons enfin qu'on a  $ar \leq P$  où  $P$  est le périmètre de  $O$ .

Soit  $\lambda > 0$ . On note à présent, pour tout  $i$  entre 1 et  $r$ ,  $B_{E_i}(\lambda)$  le nombre de valeurs propres de l'équation inférieures à  $\lambda$  pour le domaine  $E_i$ . On va majorer  $B_{E_i}(\lambda)$  : pour cela, il nous suffit de trouver un minorant pour la  $n$ -ième valeur propre de  $E_i$ .

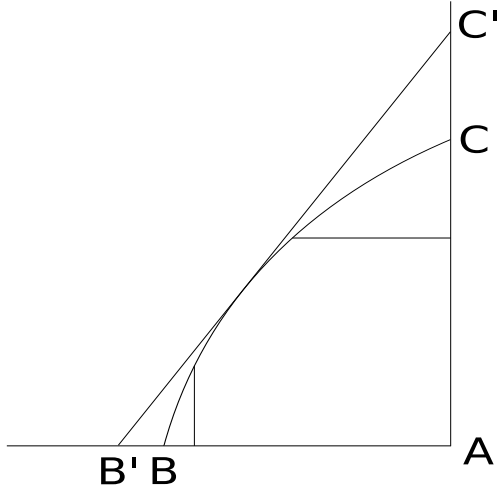


FIG. 2.7 – Type 1

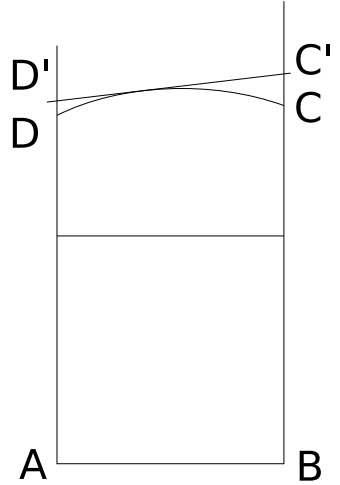


FIG. 2.8 – Type 2

Pour cela, on prend un point de la frontière et on trace la tangente à la frontière en ce point. On obtient, selon les cas, un triangle rectangle  $AB'C'$  (fig. 2.7) ou un trapèze  $ABC'D'$  (fig. 2.8). Si  $\alpha$  est suffisamment petit, la longueur des côtés de ces figures est inférieure à  $4a$  (car on avait choisi le maillage de telle sorte que la longueur de chacun des côtés soit inférieure à  $3a$ ). On se place donc dans ce cas, et on prend  $a$  suffisamment petit, de sorte que la variation de l'angle que fait le vecteur normal avec l'axe des abscisses soit inférieure à  $\alpha$ .

On va maintenant déformer les domaines  $E_i$  comme en 2.4.10.

1. Si  $E_i$  est un domaine du premier type, on considère un repère polaire de pôle  $A$ . Soient  $\rho = f(\theta)$  (respectivement  $\rho = g(\theta)$ ) l'équation polaire de  $BC$  (respectivement  $[B'C']$ ). Les équations

$$\begin{cases} \phi = \theta \\ R = \rho \frac{g(\theta)}{f(\theta)} = \rho + \rho \frac{g(\theta) - f(\theta)}{f(\theta)} \end{cases}$$

représentent une application qui transforme  $E_i$  en le triangle rectangle  $AB'C'$ .

2. Sinon, on considère un repère orthonormé d'origine  $A$ , tel que  $[AB]$  soit contenu dans l'axe des abscisses du repère. On note  $y = f(x)$  (respectivement  $y = g(x)$ ) l'équation de  $CD$  (respectivement  $[C'D']$ ). Comme précédemment, le système d'équations

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \frac{g(x)}{f(x)} = y + y \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \end{cases}$$

définit une application transformant  $E_i$  en le trapèze  $ABC'D'$ .

Dans la suite, on notera  $E'_i$  le domaine obtenu par déformation de  $E_i$ .

Les transformations présentées ici sont de la forme de celle définie en 2.4.10.

Pour montrer cela, considérons par exemple le cas d'un domaine  $E_i$  du second type. Il s'agit de montrer que l'application  $h$  définie par

$$\forall x, y \in E_i \cup E'_i, \quad h(x, y) = y \frac{g(x) - f(x)}{f(x)}$$

est, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, bornée par un réel qui tend vers 0 lorsque  $a \rightarrow 0$ .

Notons  $M$  le point d'intersection de  $CD$  et  $[C'D']$ , et  $(x_M, y_M)$  les coordonnées de  $M$ . On a l'égalité  $f(x_M) = g(x_M)$ .

Pour tout point  $(x, y)$  appartenant à  $E_i \cup E'_i$ , on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = y \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{(f(x))^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{g(x) - f(x)}{f(x)}.$$

Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= \left| \int_{x_M}^x (f'(t) - g'(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{x_M}^x |f'(t) - g'(t)| dt \\ &\leq (x - x_M) \sup_{[0, a]} |f' - g'| \\ &\leq a \cdot \sup_{[0, a]} |f' - g'|. \end{aligned}$$

Or  $f$  est affine, donc  $f'$  est une constante. Le terme  $|f'(t) - g'(t)|$  représente donc la valeur absolue de l'angle fait par la tangente à la frontière de  $O$  au point  $t$  avec la droite  $[CD]$ . Par ailleurs, si  $\beta > 0$  est un angle donné, il est possible de réduire suffisamment  $a$  de sorte que, pour toute portion de frontière contenue dans un des  $E_i$ , la variation de l'angle formé par le vecteur normal à la frontière avec l'axe des abscisses soit inférieure à  $\beta$ , et ceci indépendamment de l'indice  $i$ . On a ainsi l'inégalité

$$|f(x) - g(x)| \leq a \cdot \psi(a) \quad \text{où} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \psi(a) = 0$$

et  $\psi(a)$  est une quantité indépendante de  $i$ .

Ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} |h(x, y)| &= |y| \frac{|f(x) - g(x)|}{|f(x)|} \\ &\leq 4a \cdot \frac{a\psi(a)}{a} \\ &= 4a\psi(a). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |h_y(x, y)| &= \frac{|f(x) - g(x)|}{|f(x)|} \\ &\leq \frac{a\psi(a)}{a} \\ &= \psi(a). \end{aligned}$$

Pour la dérivée partielle  $h_x$ , c'est un peu plus long. On a d'abord

$$\begin{aligned}
|h_x(x, y)| &= |y| \frac{|g'(x)f(x) - g(x)f'(x)|}{|f(x)|^2} \\
&\leq 4a \cdot \frac{|g'(x)f(x) - g(x)f'(x)|}{a^2} \\
&= \frac{4}{a} \cdot \left[ |g'(x) - f'(x)| \cdot |f(x)| + |f(x) - g(x)| \cdot |f'(x)| \right] \\
&\leq \frac{4}{a} \cdot \left[ \psi(a) \cdot 4a + a\psi(a) \cdot |f'(x)| \right]
\end{aligned}$$

Puisque  $f$  est affine, on a

$$|f'(x)| = \frac{|f(a) - f(0)|}{a} \leq \frac{|f(a)| + |f(0)|}{a} \leq \frac{8a}{a} = 8.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
|h_x(x, y)| &\leq \frac{4}{a} \cdot \left[ \psi(a) \cdot 4a + a\psi(a) \cdot 8 \right] \\
&\leq 48\psi(a).
\end{aligned}$$

Ainsi,  $h$  et ses dérivées partielles sont bornées par un réel  $\kappa(a)$ , qui tend vers 0 quand  $a$  tend vers 0, et qui est indépendant de  $i$ . Le même genre de résultat se prouve de la même façon pour un domaine  $E_i$  du premier type.

Par le théorème 2.4.11, les  $n$ -ièmes valeurs propres  $\mu_n$  et  $\mu'_n$  de  $E_i$  et  $E'_i$  vérifient une relation du type

$$\left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| \leq \eta(a)$$

où  $\lim_{a \rightarrow 0} \eta(a) = 0$ , et cette quantité est indépendante de  $n$ .

Les nombres  $B_{E_i}(\lambda)$  et  $B_{E'_i}(\lambda)$  (ce dernier désignant le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  pour le domaine  $E'_i$ ) satisfont donc à une inégalité analogue :

$$\left| \frac{B_{E'_i}(\lambda)}{B_{E_i}(\lambda)} - 1 \right| \leq \delta(a) \tag{2.8}$$

où  $\lim_{a \rightarrow 0} \delta(a) = 0$ .



Le domaine  $E'_i$  est soit un triangle rectangle, dont les côtés adjacents à l'angle droit ont une longueur inférieure à  $4a$ , soit un trapèze, et cette dernière figure peut être considérée comme la réunion d'un rectangle dont les côtés ont une longueur inférieure à  $3a$ , et d'un triangle rectangle, dont les côtés adjacents à l'angle droit ont une longueur inférieure à  $3a$ . Grâce aux résultats du paragraphe 2.5.3, on a une inégalité du type

$$B_{E'_i}(\lambda) \leq K_1 a^2 \lambda + K_2 a \sqrt{\lambda}$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux constantes, qu'on peut choisir indépendantes de  $a$ ,  $i$  et  $\lambda$ . En effet, d'une part, le produit  $K_1 a^2$  est relié à l'aire du carré qu'on choisit en 2.5.3, qui est majorée par  $16a^2$  (puisque les côtés des polygones ont, par construction, une longueur inférieure à  $4a$ ). D'autre part, si on revient au paragraphe 2.5.2, on s'aperçoit que le terme en  $\sqrt{\lambda}$  est majoré par  $2I\sqrt{\lambda} + 2$ , où  $I$  est la longueur d'un quart de cercle de rayon compris entre  $a/\pi$  et  $4a/\pi$ . On peut ainsi écrire

$$I \leq \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{4a}{\pi} = 2a$$

donc  $I \leq aJ$  où  $J$  est une constante indépendante de  $a$ .

Ainsi, par (2.8), on a

$$B_{E_i}(\lambda) \leq c_1 a^2 \lambda + c_2 a \sqrt{\lambda} \quad (2.9)$$

$c_1$  et  $c_2$  étant deux constantes, indépendantes de  $a$ ,  $i$  et de  $\lambda$ .

On va maintenant calculer un équivalent de  $A(\lambda)$ , le nombre de valeurs propres pour  $O$  inférieures ou égales à  $\lambda$  avec la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ , où  $\sigma$  est une fonction positive continue sur  $\text{Fr}(O)$ . Pour le carré  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , on note  $A_i(\lambda)$  (respectivement  $B_i(\lambda)$ ) le nombre de valeurs propres pour la condition aux limites  $u = 0$  (respectivement  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ).

On sait, par 2.5.2, que

$$A_i(\lambda) = \lambda \frac{a^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}) \text{ et } B_i(\lambda) = \lambda \frac{a^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

Par une méthode analogue à celle qui a été utilisée pour un ouvert-carré, on a

$$\sum_{i=1}^k A_i(\lambda) \leq A(\lambda) \leq \sum_{i=1}^k B_i(\lambda) + \sum_{i=1}^r B_{E_i}(\lambda).$$

Or, on sait que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k A_i(\lambda) &= \lambda \frac{ha^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}), \\ \sum_{i=1}^k B_i(\lambda) &= \lambda \frac{ha^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}), \\ \sum_{i=1}^r B_{E_i}(\lambda) &\leq c_1 a^2 r \lambda + K \sqrt{\lambda}, \end{aligned}$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $a$  et  $\lambda$ .

D'où l'inégalité

$$\lambda \frac{ha^2}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}) \leq A(\lambda) \leq \lambda \left[ \frac{ha^2}{4\pi} + c_1 a^2 r \right] + O(\sqrt{\lambda}). \quad (2.10)$$

Puisque  $ar \leq P$ , la quantité  $a^2r$  tend vers 0 lorsque  $a$  tend vers 0, et de plus, si l'aire de  $O$  est notée  $\mathcal{A}$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 > 0, a \leq a_0 \Rightarrow |ha^2 - \mathcal{A}| < \frac{\mathcal{A}\varepsilon}{3}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , puis un tel  $a_0$ . Soit  $a \leq a_0$  tel que toutes les inégalités ci-dessus soient valables. L'inégalité (2.10) se réécrit

$$\frac{ha^2}{\mathcal{A}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \leq \frac{4\pi A(\lambda)}{\mathcal{A}\lambda} \leq \left[\frac{ha^2}{\mathcal{A}} + \frac{c_1 4\pi}{\mathcal{A}} a^2r\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Puisque  $|ha^2 - \mathcal{A}| < \frac{\mathcal{A}\varepsilon}{3}$ , on a  $-\frac{\varepsilon}{3} < \frac{ha^2}{\mathcal{A}} - 1 < \frac{\varepsilon}{3}$ . D'où

$$1 - \frac{\varepsilon}{3} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \leq \frac{4\pi A(\lambda)}{\mathcal{A}\lambda} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{c_1 4\pi}{\mathcal{A}} a^2r + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Et puisque  $c_1$  est indépendante de  $a$ ,  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{c_1 4\pi}{\mathcal{A}} a^2r = 0$ . Ainsi, pour  $a$  suffisamment petit, disons  $a \leq a_1$ ,

$$1 - \frac{\varepsilon}{3} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \leq \frac{4\pi A(\lambda)}{\mathcal{A}\lambda} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Finalement, pour  $\lambda$  suffisamment grand, disons  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$1 - \varepsilon \leq \frac{4\pi A(\lambda)}{\mathcal{A}\lambda} \leq 1 + \varepsilon.$$

Ceci signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_0, \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{4\pi A(\lambda)}{\mathcal{A}\lambda} \leq 1 + \varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\mathcal{A}\lambda} = 1.$$

En résumé, on a un théorème :

**Théorème 2.5.7.** *Soit  $O$  un ouvert connexe borné de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour la condition aux limites  $u = 0$  ou  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ , où  $\sigma$  est une fonction continue positive sur  $Fr(O)$ , le nombre  $A(\mu)$  de valeurs propres de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  inférieures à une certaine borne positive  $\mu$  est équivalent à  $\mu \frac{\mathcal{A}}{4\pi}$ , où  $\mathcal{A}$  est l'aire de  $O$ . En d'autres termes,*

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{4\pi A(\mu)}{\mathcal{A}\mu} = 1.$$

Ainsi, on a l'équivalent de la  $n$ -ième valeur propre  $\lambda_n$  :

$$\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{4\pi}{\mathcal{A}}.$$

On avait imposé que, si la condition aux limites était  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ , la fonction  $\sigma$  soit positive. On va montrer que le théorème précédent reste valable même si  $\sigma$  prend des valeurs négatives sur tout ou partie de la frontière. Pour cela, nous aurons besoin de l'inégalité suivante :

**Lemme 2.5.8.** *Soit  $O$  un ouvert connexe borné  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $\overline{O}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $O$ , et  $\sigma$  une fonction continue sur  $\Gamma$ . Notons  $D[\varphi] = \iint_O (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy$  et  $H[\varphi] = \iint_O \varphi^2 dx dy$ . On a :*

$$\exists C, \alpha \in \mathbb{R}_+, \left| \int_{\Gamma} \sigma \varphi^2 ds \right| \leq C \sqrt{D[\varphi]} \sqrt{H[\varphi]} + \alpha H[\varphi],$$

et les constantes  $C, \alpha$  sont indépendantes de  $\varphi$ .

La démonstration de ce lemme est longue et technique : elle est donnée en annexe. Soit  $O$  un ouvert connexe borné  $\mathcal{C}^1$  de frontière  $\Gamma$ . Soit  $\sigma$  une fonction continue quelconque sur  $\Gamma$ , notons  $\mu_n$  la  $n$ -ième valeur propre de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  avec la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$  sur  $\Gamma$ , et  $\lambda_n$  la  $n$ -ième valeur propre de cette équation pour la condition  $u = 0$  sur  $\Gamma$ . On sait que  $\mu_n \leq \lambda_n$  (par le théorème 2.4.5). Pour prouver l'affirmation, nous allons encadrer  $\mathcal{D}[\varphi]$ , puis utiliser la propriété du maximum-minimum des valeurs propres pour obtenir un encadrement de  $\mu_n$ . Il suffit donc de se restreindre aux fonctions  $\varphi$  telles que  $\mu_n \leq \mathcal{D}[\varphi] \leq \lambda_n + 1$ , puisque c'est parmi ces fonctions que se trouvera une fonction  $\varphi$  telle que  $\mathcal{D}[\varphi] = \mu_n$ . On supposera de plus que  $H[\varphi] = 1$ , ce qui revient à normaliser les fonctions  $\varphi$ . Soit une telle fonction  $\varphi$ . Par le lemme précédent :

$$\exists C, \alpha \in \mathbb{R}_+, \left| \int_{\Gamma} \sigma \varphi^2 ds \right| \leq C \sqrt{D[\varphi]} + \alpha$$

et les constantes  $C, \alpha$  sont indépendantes de  $\varphi$ . Par définition de  $\mathcal{D}[\varphi]$ , on en déduit l'inégalité

$$D[\varphi] - C \sqrt{D[\varphi]} - \alpha \leq \mathcal{D}[\varphi] \leq D[\varphi] + C \sqrt{D[\varphi]} + \alpha. \quad (2.11)$$

Puisque  $\mathcal{D}[\varphi] \leq \lambda_n + 1$ , on a

$$D[\varphi] - C \sqrt{D[\varphi]} - \alpha - 1 \leq \lambda_n.$$

Pour  $n$  suffisamment grand, disons supérieur à  $N_0$ , on a  $\frac{1}{2}D[\varphi] \geq C \sqrt{D[\varphi]} + \alpha + 1$ , car le maximum-minimum de  $D[\varphi]$ , qui est la  $n$ -ième valeur propre pour le problème avec condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , tend vers  $+\infty$ . D'où, pour  $N \geq N_0$  :

$$D[\varphi] \leq 2\lambda_n.$$

Or  $\lambda_n = n \frac{4\pi}{\mathcal{A}} + \theta(n)\sqrt{n}$ , où  $\theta$  est bornée, donc en réutilisant l'inégalité (2.11) :

$$D[\varphi] - K\sqrt{n} \leq \mathcal{D}[\varphi] \leq D[\varphi] + K\sqrt{n} \quad (2.12)$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $\varphi$ .

Cette relation est également valable pour le minimum des différents membres de l'inégalité avec les conditions d'orthogonalité  $H[\varphi, v_k] = 0$  pour des fonctions  $v_1, \dots, v_{n-1}$  données, et donc est aussi valable pour le maximum-minimum de ces expressions. Le maximum-minimum de  $D[\varphi]$  est la  $n$ -ième valeur propre  $\rho_n$  pour la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , et on sait que  $\rho_n = n \frac{4\pi}{\mathcal{A}} + O(\sqrt{n})$ . On a donc

$$\mu_n = n \frac{4\pi}{\mathcal{A}} + O(\sqrt{n})$$

ce que nous voulions prouver.

Nous avons finalement obtenu la loi asymptotique pour un ouvert connexe borné de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'objet du prochain paragraphe est d'obtenir un ordre de grandeur du terme d'erreur  $A(\lambda) - \frac{4\pi A(\lambda)}{\mathcal{A}\lambda}$ .

## 2.5.6 Estimation du terme d'erreur

Pour obtenir cette estimation, il faut affiner l'approximation de l'ouvert  $O$  par les carrés. On commence par partitionner le plan avec des carrés de côté 1 : on note  $k_0$  (éventuellement nul) le nombre de tels carrés contenus dans  $O$ , et  $C_1^0, \dots, C_{k_0}^0$  ces carrés. On divise maintenant chaque carré de la partition en 4 carrés de côté  $1/2$ , et on note  $k_1$  le nombre de tels carrés contenus dans  $O$  qui ne sont pas contenus dans un des  $C_i^0$  ; on désigne par  $C_1^1, \dots, C_{k_1}^1$  ces carrés. Par récurrence, après  $m$  itérations de ce procédé, on a  $k_m$  carrés  $C_1^m, \dots, C_{k_m}^m$ , de côté  $1/2^m$ , qui sont contenus dans  $O$  mais dans aucun autre des carrés précédents.

Comme dans le paragraphe précédent, on construit  $E_1, \dots, E_r$  les  $r$  domaines adjacents à la frontière ; le nombre  $a$  est égal à  $1/2^m$ . On a les inégalités

$$\frac{k_i}{2^i} \leq P, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad \frac{r}{2^m} \leq P \quad (2.13)$$

où, comme avant,  $P$  désigne le périmètre de  $O$ .

On note  $A_i^j(\lambda)$  (respectivement  $A_{E_i}(\lambda)$ ) le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  pour le domaine  $Q_i^j$  (respectivement  $E_i$ ) avec la condition aux limites  $u = 0$ , et  $B_i^j(\lambda)$  (respectivement  $B_{E_i}(\lambda)$ ) le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  pour le domaine  $Q_i^j$  (respectivement  $E_i$ ) avec la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . On a :

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{k_j} A_i^j(\lambda) \leq A(\lambda) \leq \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{k_j} B_i^j(\lambda) + \sum_{i=1}^r B_{E_i}(\lambda).$$

On sait, avec les paragraphes 2.5.2 et 2.5.4, que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{k_j} B_i^j(\lambda) + \sum_{i=1}^r B_{E_i}(\lambda) &\leq \sum_{j=0}^m \left[ \lambda \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} + K \frac{k_j}{2^j} \sqrt{\lambda} \right] + \frac{c_1}{2^{2m}} r \lambda + \frac{c_2}{2^m} r \sqrt{\lambda} \\ &= \lambda \left[ \left( \sum_{j=0}^m \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} \right) + \frac{c_1}{2^{2m}} r \right] + \sqrt{\lambda} \left[ \left( \sum_{j=0}^m K \frac{k_j}{2^j} \right) + \frac{c_2}{2^m} r \right] \\ &\leq \lambda \left[ \left( \sum_{j=0}^m \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} \right) + \frac{c_1}{2^{2m}} r \right] + K_1 \sqrt{\lambda} \left[ \left( \sum_{j=0}^m \frac{k_j}{2^j} \right) + \frac{r}{2^m} \right] \end{aligned}$$

où  $K, c_1, c_2$  sont des constantes indépendantes de  $m$  et  $\lambda$ , et  $K_1 = \max(K, c_2)$ .

Or, par les inégalités (2.13), on a

$$\left( \sum_{j=0}^m \frac{k_j}{2^j} \right) + \frac{r}{2^m} \leq P(m+2).$$

Et la différence  $\mathcal{A} - \left( \sum_{j=0}^m \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} \right)$  est d'ordre  $1/2^{2m}$  (c'est l'aire de la réunion  $\bigcup_{i=1}^r E_i$ , majorée par  $36r/2^{2m}$ ), donc on peut écrire

$$\left[ \left( \sum_{j=0}^m \frac{k_j}{4\pi 2^{2j}} \right) + \frac{c_1}{2^{2m}} r \right] \leq \mathcal{A} + c_3 \frac{r}{2^{2m}} \leq \mathcal{A} + \frac{Pc_3}{2^m}.$$

où  $c_3$  est une constante indépendante de  $m$  et  $\lambda$ .

Le membre de droite de l'inégalité est donc majoré par

$$\frac{1}{4\pi} \left( \mathcal{A} + \frac{Pc_3}{2^m} \right) \lambda + P(m+2)\sqrt{\lambda} = \lambda \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + P \left( \lambda \frac{c_3}{2^m} + K_1(m+2)\sqrt{\lambda} \right).$$

Pour  $m \geq 2$ , on a  $2m \geq m+2$ ; en notant  $C = P \cdot \max(c_3, 2K_1)$ , on a finalement

$$A(\lambda) \leq \lambda \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + C \left( \frac{\lambda}{2^m} + m\sqrt{\lambda} \right)$$

où  $C$  est une constante, indépendante de  $\lambda$  et de  $m$  (car  $C$  est construite en prenant successivement des maximums de constantes ne dépendant ni de  $\lambda$  ni de  $m$ ).

Une étude de la fonction

$$x \mapsto \frac{\lambda}{2^x} + x\sqrt{\lambda}$$

montre qu'elle admet un minimum en  $x_0 = \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} + \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(4)}$ . Puisque  $\ln(2) < 1$ ,  $\ln(\ln(2))$

est négatif, donc  $x_0 \leq \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} = x_1$ . On **choisit** maintenant  $m = E(x_1)$ , et on obtient

$$\begin{aligned} C \left( \frac{\lambda}{2^m} + m\sqrt{\lambda} \right) &\leq C \left( \frac{\lambda}{2^{\frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} - 1}} + \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} \sqrt{\lambda} \right) \\ &= C \left[ \exp \left( \ln(\lambda) - \frac{\ln(2) \cdot \ln(\lambda)}{\ln(4)} \right) + \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} \sqrt{\lambda} \right] \\ &= C \left[ \exp \left( \ln(\lambda) - \frac{\ln(\lambda)}{2} \right) + \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} \sqrt{\lambda} \right] \\ &= C \left[ \sqrt{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\ln(4)} \sqrt{\lambda} \right] \\ &\leq 2C\sqrt{\lambda} \ln(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \text{ suffisamment grand.} \end{aligned}$$

Finalement

$$A(\lambda) \leq \lambda \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + 2C\sqrt{\lambda} \ln(\lambda). \quad (2.14)$$

Puisque le membre de gauche de l'inégalité ne différerait du membre de droite que par le terme  $\frac{c_1}{2^{2m}} r\lambda + \frac{c_2}{2^m} r\sqrt{\lambda}$ , le membre de gauche a également la forme (2.14).

Par ailleurs, l'inégalité (2.12) montre que ce résultat est valable même si  $\sigma$  n'est plus une fonction positive.

D'où le théorème :

**Théorème 2.5.9. (Estimation du terme d'erreur)**

Soit  $O$  un ouvert connexe borné de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $A(\mu)$  le nombre de valeurs propres de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  inférieures à une certaine borne positive  $\mu$  pour la condition aux limites  $u = 0$  ou  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ , où  $\sigma$  est une fonction continue sur  $Fr(O)$ . Alors

$$A(\mu) - \mu \frac{\mathcal{A}}{4\pi} = O(\sqrt{\mu} \ln(\mu)).$$

# Annexe

## Théorème de Gauss-Ostrogradski

Soit  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que la dérivée partielle  $P_y$  soit continue. Considérons un “trapèze curviligne de première espèce” ( $T$ ), c’est-à-dire un domaine du plan délimité par une courbe  $(\partial T) = (PQRS)$  telle que  $(PS)$  et  $(QR)$  soient parallèles à l’axe  $(Oy)$ , et que  $(PQ)$  et  $(SR)$  puissent être paramétrées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(PQ) : y &= y_0(x), \quad x \in [a, b] \\(SR) : y &= Y(x), \quad x \in [a, b]\end{aligned}$$

avec  $y_0$  et  $Y$  des fonctions continues (voir figure ci-dessous).  $a$  est l’abscisse commune de  $P$  et  $S$ , et  $b$  est celle de  $Q$  et  $R$ .

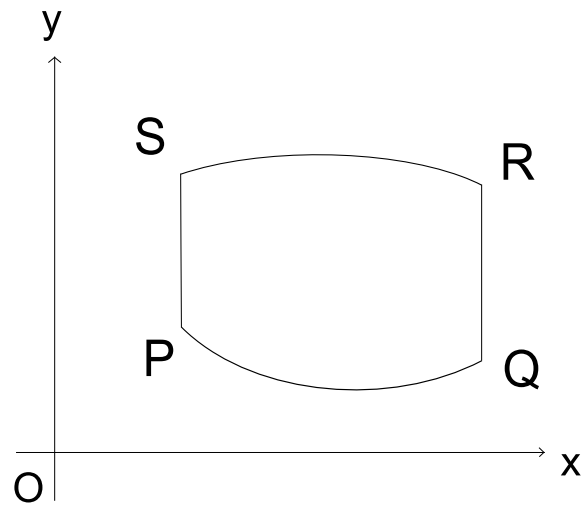


FIG. 2.9 – Trapèze curviligne de première espèce

Calculons l’intégrale  $\iint_T P_y dx dy$ . Par le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}\iint_T P_y dx dy &= \int_a^b \left( \int_{y_0(x)}^{Y(x)} P_y dy \right) dx. \\ &= \int_a^b P(x, Y(x)) dx - \int_a^b P(x, y_0(x)) dx.\end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b P(x, Y(x)) dx &= \int_{(SR)} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, y_0(x)) dx &= \int_{(PQ)} P(x, y) dx.\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que

$$\int_{(QR)} P(x, y) dx = \int_{(SP)} P(x, y) dx = 0,$$

puisque  $(QR)$  et  $(SP)$  sont parallèles à  $(Oy)$ . On a donc :

$$\begin{aligned}\iint_T P_y dx dy &= \int_{(SR)} P(x, y) dx - \int_{(PQ)} P(x, y) dx \\ &= \int_{(SR)} P(x, y) dx + \int_{(QP)} P(x, y) dx \\ &= \int_{(SR)} P(x, y) dx + \int_{(QP)} P(x, y) dx \\ &\quad - \int_{(QR)} P(x, y) dx - \int_{(SP)} P(x, y) dx \\ &= \int_{(SR)} P(x, y) dx + \int_{(QP)} P(x, y) dx \\ &\quad + \int_{(RQ)} P(x, y) dx + \int_{(PS)} P(x, y) dx \\ \text{soit } \iint_T P_y dx dy &= - \int_{\partial T} P(x, y) dx.\end{aligned}$$

Il faut faire attention au signe devant l'intégrale curviligne : la convention est, pour l'intégrale, qu'on parcourt le chemin dans le sens direct. On a donc le résultat suivant :

**Proposition.** *Soit  $T$  un trapèze curviligne de première espèce délimité par son bord  $\partial T$ . Si  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $T$  telle que sa dérivée partielle  $P_y$  soit continue sur  $T$ , alors*

$$\iint_T P_y dx dy = - \int_{\partial T} P(x, y) dx.$$

Nous allons étendre ce résultat à d'autres types de domaines. Remarquons que si un domaine  $D$  du plan est décomposable en deux trapèzes curvilignes de première espèce, alors on a

$$\iint_D P_y dx dy = - \int_{\partial D} P(x, y) dx.$$



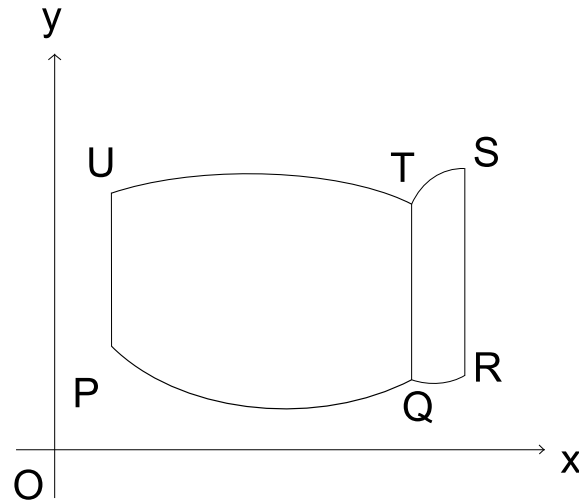


FIG. 2.10 – Le domaine  $D$

En effet, par hypothèse, on peut décomposer  $D$  comme sur la figure ci-dessus. Notons  $D_1$  et  $D_2$  les deux domaines délimités par  $(PQTU)$  et  $(QRST)$  respectivement. On a alors :

$$\begin{aligned} \iint_D P_y dx dy &= \iint_{D_1} P_y dx dy + \iint_{D_2} P_y dx dy \\ &= - \int_{\partial D_1} P(x, y) dx - \int_{\partial D_2} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

puisque la proposition a déjà été montrée pour  $D_1$  et  $D_2$ . Et on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\partial D_1} P(x, y) dx - \int_{\partial D_2} P(x, y) dx &= - \int_{(PQ)} P(x, y) dx - \int_{(QT)} P(x, y) dx \\ &\quad - \int_{(TU)} P(x, y) dx - \int_{(UP)} P(x, y) dx \\ &\quad - \int_{(QR)} P(x, y) dx - \int_{(RS)} P(x, y) dx \\ &\quad - \int_{(ST)} P(x, y) dx - \int_{(TQ)} P(x, y) dx \end{aligned}$$

On a  $\int_{(QT)} P(x, y) dx + \int_{(TQ)} P(x, y) dx = 0$ , et donc, en regroupant les termes restants, on constate que

$$\begin{aligned} - \int_{\partial D_1} P(x, y) dx - \int_{\partial D_2} P(x, y) dx &= - \int_{(PR)} P(x, y) dx - \int_{(RS)} P(x, y) dx \\ &\quad - \int_{(SU)} P(x, y) dx - \int_{(UP)} P(x, y) dx \\ &= - \int_{\partial D} P(x, y) dx \end{aligned}$$

et finalement

$$\iint_D P_y dx dy = - \int_{\partial D} P(x, y) dx.$$

ce qui constitue le résultat voulu.

On en déduit l'important résultat suivant :

**Proposition.** Soit  $D$  un domaine du plan qu'il est possible de partitionner en un nombre fini de trapèzes curvilignes de première espèce. Si  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $D$  telle que sa dérivée partielle  $P_y$  soit continue sur  $D$ , alors on a

$$\iint_D P_y dx dy = - \int_{\partial D} P(x, y) dx.$$

si  $\partial D$  est le bord du domaine  $D$ .

On peut maintenant étendre ce résultat aux domaines bornés délimités par une courbe continue :

**Proposition.** Soit  $D$  un domaine du plan tel que  $\partial D$  soit une courbe continue. Si  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $D$  telle que sa dérivée partielle  $P_y$  soit continue sur  $D$ , alors on a

$$\iint_D P_y dx dy = - \int_{\partial D} P(x, y) dx.$$

*Démonstration. Premier cas :* Si  $D$  est un polygone quelconque, le théorème est vrai, car on peut décomposer un polygone en triangles et en trapèzes curvilignes de première espèce, comme le montre la figure suivante :

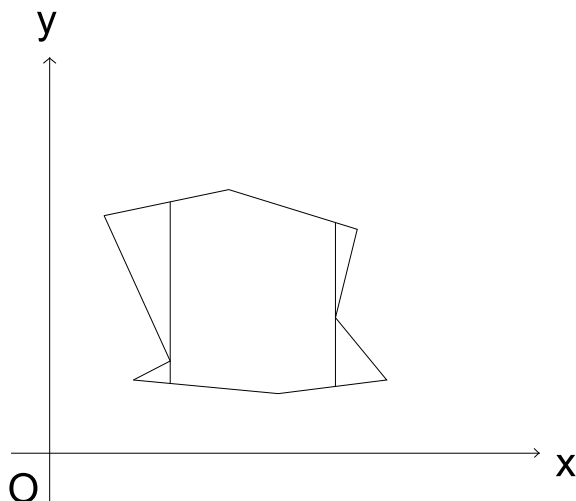


FIG. 2.11 – Un polygone  $D$

et le triangle est un cas particulier de trapèze curviligne.

**Deuxième cas :** Si  $D$  est un domaine quelconque, on approxime  $\partial D$  par une “ligne polygonale”  $L_N$ , c’est-à-dire une juxtaposition de segments  $[A_i A_{i+1}]$  où les  $A_i$  sont des points de  $\partial D$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , avec  $A_1 = A_N$  (de sorte que  $L_N$  soit fermée). On note  $K_N$  le polygone délimité par  $L_N$ , et on choisit les lignes polygonales de manière que la longueur du plus grand côté de  $L_N$  tende vers 0 quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

On a alors, puisque le théorème est vrai pour  $K_N$  :

$$\iint_{K_N} P_y dx dy = - \int_{L_N} P(x, y) dx.$$

On a  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \iint_{K_N} P_y dx dy = \iint_D P_y dx dy$ , et on a le résultat suivant :

**Lemme.** *Pour toute courbe fermée  $L$  continue, si les  $L_N$  sont des lignes polygonales approximant  $L$  au sens précédent, on a, avec les mêmes notations :*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{L_N} P(x, y) dx &= \int_L P(x, y) dx \\ \text{et } \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{L_N} P(x, y) dy &= \int_L P(x, y) dy. \end{aligned}$$

*Démonstration du lemme.* Il suffit de montrer la première égalité, la démonstration de la seconde étant identique. Soit  $\varepsilon > 0$ . Notons  $\Delta x_i = \overline{A_i A_{i+1}}$  et  $P_i = P(A_i)$ . Soit  $N_0$  le rang à partir duquel

$$\left| \int_L P(x, y) dx - \sum_i P_i \Delta x_i \right| \leq \varepsilon$$

et tel qu'on ait :

$$\forall i, \forall M \in [A_i A_{i+1}], \quad |P(M) - P_i| \leq \varepsilon$$

(c'est possible car  $P$  est continue sur les  $L_k$ , qui sont des compacts, donc est uniformément continue sur les  $L_k$ , et la longueur du plus grand segment composant les  $L_k$  tend vers 0). Soit  $N \geq N_0$ .

On sait que, d'une part

$$\int_{L_N} P(x, y) dx = \sum_i \int_{[A_i A_{i+1}]} P(x, y) dx,$$

et d'autre part

$$\sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i \int_{[A_i A_{i+1}]} P_i dx.$$

D'où :

$$\int_{L_N} P(x, y) dx = \sum_i P_i \Delta x_i + \sum_i \int_{[A_i A_{i+1}]} [P(x, y) - P_i] dx,$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} \left| \int_L P(x, y) dx - \int_{L_N} P(x, y) dx \right| &= \left| \int_L P(x, y) dx - \sum_i P_i \Delta x_i \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \int_{[A_i A_{i+1}]} [P(x, y) - P_i] dx \right| \\ &\leq \left| \int_L P(x, y) dx - \sum_i P_i \Delta x_i \right| \\ &\quad + \sum_i \int_{[A_i A_{i+1}]} |P(x, y) - P_i| dx \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left| \int_L P(x, y) dx - \int_{L_N} P(x, y) dx \right| &\leq \varepsilon + \varepsilon \sum_i \overline{A_i A_{i+1}} \\ &\leq \varepsilon(1 + L). \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

Il ne reste qu'à faire tendre  $N$  vers  $+\infty$  pour obtenir

$$\iint_D P_y dx dy = - \int_{\partial D} P(x, y) dx.$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

On énonce maintenant des résultats analogues, pour la dérivée suivant la première variable.

Soit  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que la dérivée partielle  $Q_x$  soit continue. Considérons un "trapèze curviligne de deuxième espèce" ( $T'$ ), c'est-à-dire un domaine du plan délimité par une courbe  $(\partial T') = (PQRS)$  telle que  $(PQ)$  et  $(SR)$  soient parallèles à l'axe  $(Ox)$ , et que  $(PS)$  et  $(QR)$  puissent être paramétrées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (PS) : x &= x_0(y), y \in [c, d] \\ (QR) : x &= X(y), y \in [c, d] \end{aligned}$$

avec  $x_0$  et  $X$  des fonctions continues (voir figure ci-dessous).  $c$  est l'ordonnée commune de  $P$  et  $Q$ , et  $d$  est celle de  $R$  et  $S$ .

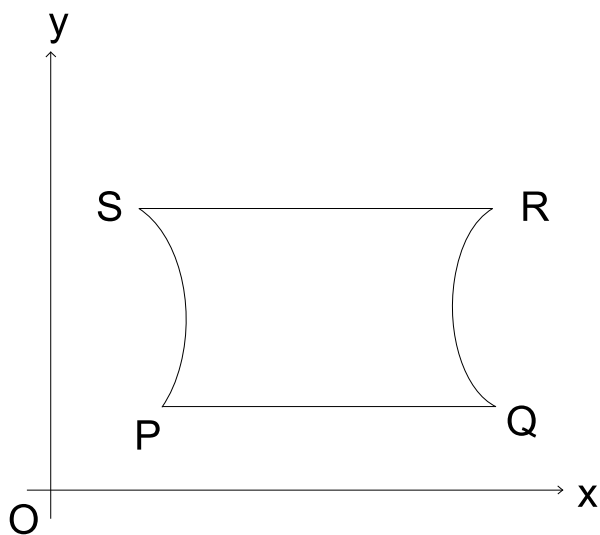


FIG. 2.12 – Trapèze curviligne de deuxième espèce

On montre de la même façon que précédemment la proposition suivante :

**Proposition.** Soit  $T'$  un trapèze curviligne de seconde espèce délimité par son bord  $\partial T'$ . Si  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $T'$  telle que sa dérivée partielle  $Q_x$  soit continue sur  $T'$ , alors

$$\iint_{T'} Q_x dx dy = \int_{\partial T'} Q(x, y) dy.$$

et sa généralisation :

**Proposition.** Soit  $D$  un domaine du plan tel que  $\partial D$  soit une courbe continue. Si  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $D$  telle que sa dérivée partielle  $Q_x$  soit continue sur  $D$ , alors

$$\iint_{T'} Q_x dx dy = \int_{\partial T'} Q(x, y) dy.$$

De tous ces résultats, on déduit un *théorème de Gauss* :

**Théorème. (Formule de Gauss)**

Soit  $D$  un domaine du plan tel que  $\partial D$  soit une courbe continue. Si  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues sur  $D$  telle que les dérivées partielles  $P_y$  et  $Q_x$  soient continues sur  $D$ , alors on a

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

On va déduire de ce résultat une autre formule. En remplaçant dans cette expression  $P$  par  $-Q$  et  $Q$  par  $P$ , on obtient :

$$\int_{\partial D} P(x, y) dy - Q(x, y) dx = \iint_D (P_x + Q_y) dx dy.$$

On sait que, si  $s$  est l'abscisse curviligne d'un point de la courbe, l'angle  $\alpha(s)$  entre l'axe  $(Ox)$  et le vecteur tangent local  $\vec{T}$  vérifie  $\cos(\alpha(s)) = x'(s)$ ,  $\sin(\alpha(s)) = y'(s)$ . On a donc, si  $s$  varie entre 0 et  $S$  :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P(x, y) dy - Q(x, y) dx &= \int_0^S [P(x(s), y(s))y'(s) - Q(x(s), y(s))x'(s)] ds \\ &= \int_0^S [P(x(s), y(s)) \sin(\alpha(s)) - Q(x(s), y(s)) \cos(\alpha(s))] ds \\ &= \int_{\partial D} [P(x(s), y(s)) \sin(\alpha(s)) - Q(x(s), y(s)) \cos(\alpha(s))] ds. \end{aligned}$$

Si  $\beta(s)$  désigne l'angle que fait  $\vec{n}$  avec l'axe  $(Ox)$ , on a  $\beta(s) = \alpha(s) - \frac{\pi}{2}$ , et donc :

$$\int_{\partial D} P(x, y) dy - Q(x, y) dx = \int_{\partial D} [P(x(s), y(s)) \cos(\beta(s)) + Q(x(s), y(s)) \sin(\beta(s))] ds.$$

D'où le résultat final :

**Théorème. (Formule de Gauss-Ostrogradski)**

Soit  $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$ . Si la frontière  $\Gamma$  de  $U$  est une courbe continue de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, on a :

$$\iint_U \operatorname{div}(\vec{f}) dx dy = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{n} ds.$$

## Lemme 2.5.8

Pour démontrer ce lemme, nous avons d'abord besoin d'un autre résultat :

**Lemme.** *Soit  $O \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert connexe borné  $\mathcal{C}^1$  de frontière  $\Gamma$ . Il existe un champ de vecteurs  $\vec{F} : \overline{O} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tel que*

$$\vec{F} \cdot \vec{n} \geq 1 \text{ sur } \Gamma.$$

*Démonstration du résultat préliminaire.* Soit  $A \in \text{Fr}(O)$ , considérons le point  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\overrightarrow{BA} = 2\vec{n}(A)$ , de sorte que  $\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}(A) = 2$ . Puisque  $O$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , l'application  $M \mapsto \vec{n}(M)$  est continue, donc l'application  $M \mapsto \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n}(M)$  est continue. Il existe alors  $V_A$ , un voisinage ouvert de  $A$  tel que

$$\forall C \in V_A \cap \text{Fr}(O), \quad \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}(C) > 1.$$

Il est clair que

$$\text{Fr}(O) \subset \bigcup_{A \in \text{Fr}(O)} V_A ;$$

puisque  $\text{Fr}(O)$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ , on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini : il existe un entier  $k > 0$ ,  $k$  points  $A_1, \dots, A_k \in \text{Fr}(O)$  et les points  $B_1, \dots, B_k$  correspondants tels que

$$\text{Fr}(O) \subset \bigcup_{i=1}^k V_{A_i}.$$

On se donne enfin une *partition de l'unité* associée à  $V_{A_1}, \dots, V_{A_k}$ , c'est-à-dire des fonctions  $\theta_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telles que

1.  $\theta_i \geq 0 \quad \forall i$ ,
2.  $\forall i$ ,  $\theta_i$  est identiquement nulle en-dehors d'un compact  $K_{A_i} \subset V_{A_i}$ ,
3.  $\sum_{i=1}^k \theta_i \equiv 1$ .

On définit alors un champ de vecteurs  $\vec{F}$  par

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(M) = \sum_{i=1}^k \theta_i(M) \overrightarrow{B_i M}.$$

$\vec{F}$  est le champ de vecteurs recherché. En effet, il est clairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et, si on se donne un point  $M \in \text{Fr}(O)$  ainsi que l'ensemble  $I$  des indices  $i$  pour lesquels  $\theta_i(M) \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M) &= \sum_{i=1}^k \theta_i(M) \overrightarrow{B_i M} \cdot \vec{n}(M) \\ &= \sum_{i \in I} \theta_i(M) \overrightarrow{B_i M} \cdot \vec{n}(M) \\ &\geq \sum_{i \in I} \theta_i(M) \\ &= \sum_{i=1}^k \theta_i(M) \\ &= 1. \end{aligned} \quad \square$$

*Démonstration du lemme 2.5.8.* On se donne un champ de vecteurs  $\vec{F} = (F_1, F_2)$  comme précédemment. En notant  $\vec{n} = (n_1, n_2)$ , on a, à l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski :

$$\begin{aligned} 2 \iint_O u(\vec{F} \cdot \vec{\nabla} u) dx dy + \iint_O \operatorname{div}(\vec{F}) u^2 dx dy &= 2 \iint_O [F_1(u^2)_x + F_2(u^2)_y] dx dy \\ &\quad + \iint_O [(F_1)_x + (F_2)_y] u^2 dx dy \\ &= \int_{\Gamma} u^2 (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds \\ &\geq \int_{\Gamma} u^2 ds. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned} 2 \iint_O u(\vec{F} \cdot \vec{\nabla} u) dx dy &\leq \|\vec{F}\|_{\infty, O} \iint_O (uu_x + uu_y) dx dy \\ &\leq \|\vec{F}\|_{\infty, O} \sqrt{\iint_O u^2 \iint_O u_x^2} + \sqrt{\iint_O u^2 \iint_O u_y^2} \\ &\leq \sqrt{2} \|\vec{F}\|_{\infty, O} \sqrt{\iint_O (u_x^2 + u_y^2) \cdot \iint_O u^2} \end{aligned}$$

(on a utilisé ici l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$ ) ; par ailleurs

$$\iint_O \operatorname{div}(\vec{F}) u^2 dx dy \leq \|\operatorname{div}(\vec{F})\|_{\infty, O} \iint_O u^2 dx dy.$$

Soit maintenant  $\sigma$  une fonction continue sur  $\operatorname{Fr}(O)$  et  $\varphi$  une fonction continue sur  $\bar{O}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $O$ . Notons  $K_1 = \sqrt{2}\|\vec{F}\|_{\infty, O}$ ,  $K_2 = \|\operatorname{div}(\vec{F})\|_{\infty, O}$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \sigma \varphi^2 ds \right| &\leq \sup_{\Gamma} |\sigma| \int_{\Gamma} \varphi^2 ds \\ &\leq K_1 \cdot \sup_{\Gamma} |\sigma| \sqrt{D[\varphi]} \sqrt{H[\varphi]} + K_2 \cdot \sup_{\Gamma} |\sigma| H[\varphi]. \end{aligned}$$

Finalement, en notant  $C = K_1 \cdot \sup_{\Gamma} |\sigma|$  et  $\alpha = K_2 \cdot \sup_{\Gamma} |\sigma|$  qui sont deux constantes indépendantes de  $\varphi$ , on a

$$\left| \int_{\Gamma} \sigma \varphi^2 ds \right| \leq C \sqrt{D[\varphi]} \sqrt{H[\varphi]} + \alpha H[\varphi]. \quad \square$$

# Remerciements

Merci à M. Vilmos KOMORNIK, pour son aide et ses conseils très précieux.



# Notations

- $\operatorname{Re}(z)$  : partie réelle du nombre complexe  $z$ .
- $D((x_0, y_0), R)$  : disque ouvert de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$ .
- $\overline{D}((x_0, y_0), R)$  : disque fermé de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$ .
- $C((x_0, y_0), R)$  : cercle de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$ .
- $\overline{X}$  : adhérence de l'ensemble  $X$ .
- $\overset{\circ}{X}$  : intérieur de l'ensemble  $X$ .
- $\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$  : frontière de l'ensemble  $X$ .
- $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ , 0 sinon : le symbole de Kronecker.
- $\vec{n}(M)$  : vecteur normal unitaire sortant à une courbe en un point  $M$ .
- $E(x)$  : partie entière du réel  $x$ .

Les notations suivantes concernent les fonctions de deux variables et les champs de vecteurs.

- $f_x$  : dérivée partielle première de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$ .
- $f_{xx}$  : dérivée partielle seconde de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$ .
- $\frac{\partial f}{\partial n}$  : dérivée normale de la fonction  $f$ .
- $\vec{\nabla} f = (f_x, f_y)$  : gradient de  $f$ .
- $\operatorname{div}(\vec{F}) = (F_1)_x + (F_2)_y$  : divergence du champ de vecteurs  $\vec{F} = (F_1, F_2)$ .
- $\Delta f = \operatorname{div}(\vec{\nabla} f) = f_{xx} + f_{yy}$  : laplacien de  $f$ .

# Bibliographie

- [1] I. G. Petrovsky. *Lectures on partial differential equations*. Interscience Publishers, Londres, 1954.
- [2] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics, Vol. 1*. Interscience Publishers, Londres, 1953.
- [3] G. M. Fichtenholz. *Differential und Integralrechnung, Vol. 3*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1987.